Казахский национальный университет им. аль-Фараби

УДК 532.012(043) На правах рукописи

АБДУРАИМОВ АЗИЗБЕК ЕРАЛИЕВИЧ

Моделирование динамики гироскопического жесткого ротора центрифуги при анизотропии восстанавливающей и демпфирующей характеристики упругой опоры

6D060300 – Механика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
Искаков Жарилкасин,
к.т.н., профессор,
Институт механики и машиноведения
имени академика У.А.Джолдасбекова

Зарубежный научный консультант
Яцек Цеслик (Jacek Cieslik),
PhD, ассоциированный профессор,
AGH Университет науки и технологии

Республика Казахстан
Алматы, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1 **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА С ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ УПРУГОЙ ОПОРЫ** 14
1.1 Уравнения движения 144
1.2 Решения уравнений движения и их анализ 17
1.3 Устойчивость стационарного движения 23
1.4 Нестационарные колебания 35
1.5 Методология измерения коэффициентов демпфирования 41
2 **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА С АНИЗОТРОПИЕЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОЙ ОПОРЫ** 44
2.1 Уравнения движения 44
2.2 Решение уравнений движения и частотные характеристики нелинейной роторной системы с анизотропными упругими и демпфирующими характеристиками 46
2.3 Частотные характеристики роторной системы без демпфирования 49
2.4 Нестационарные резонансные колебания роторной системы 50
2.5 Стационарные амплитудно-частотные характеристики. Результаты 54
2.6 Нестационарные амплитудно-частотные зависимости 59
3 **РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМИ И ДЕМПФИРУЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ** 63
3.1 Уравнения движения 63
3.2 Решения уравнений движения методом усреднения 65
3.3 Аналитические основы метода 67
3.4 Результаты. Применение Метода 69
4 **РАЗРАБОТКА ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА ЦЕНТРИФУГИ НА БАЗЕ ЖЕСТКОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО РОТОРА** 87
4.1 3D модель центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора 87
4.2 Проектно-конструкторская документация (ПКД) опытного образца центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора 89
4.3 Опытный образец центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора 90
5 **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА ЦЕНТРИФУГИ НА БАЗЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА** 92
5.1 Исследование влияния анизотропии на динамику ротора 92
5.2 Результаты экспериментальных исследовании 92
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 98

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 100
П**РИЛОЖЕНИЯ** 1044

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСО РК 5.04.034-2011: государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. №1080);

ГОСТ 7.32-2001. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления;

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общее требования и правила составления.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Как известно, роторные машины широко применяются во многих отраслях промышленности и изучаются давно. Несмотря на это немало проблем, нерешенных, в частности, связанных с действием дисбаланса массы на колебания и устойчивость и впоследствии со стабилизацией и управлением резонансными колебаниями роторных машин.

Упрощенная модель с сосредоточенными параметрами роторной системы, как правило, используется для изучения динамики вала одного ротора на несущих опорах. Очень важно использование свойств и характеристик материала опор для затухания и демпфирования вибрации в целях стабилизации движения неуравновешенного ротора и вибрационных систем. Опоры являются средством подключения устройства между ротором и опорной конструкцией, которые имеют различные формы и конструкции, зависящие от конкретных предположений.

Удобный способ ввести затухание для поддержки подшипников в роторной системе на вязкоупругих гибких опорах из резины [1]. Параллельно с развитием моделирования материала

В целях усиления его нелинейного демпфирующего эффекта [2-4], которые помогают описать сложность свойств материала, применение вязкоупругих компонентов в динамике ротора и вибрационных систем в целом также увеличилось, в т.ч. с нелинейными упругими характеристиками и демпфированием. Так, например, в работе [5] исследуется параметрическое влияние различных типов затухания на производительность нелинейных виброизоляторов при гармоническом возбуждении. В статье [6] была изучена эффективность пассивных виброизоляторов с линейным демпфированием и нелинейным кубическим демпфированием в резонансных и нерезонансных областях колебаний системы с линейной жесткостью. Доказывается, что нелинейное демпфирование в отличие от линейного демпфирования не только значительно подавляют максимальную резонансную амплитуду колебаний, но и сохраняет виброизоляцию системы в области за резонансной частотой колебаний. В работе [7] в исследованиях дополнительно учтено влияние кубической нелинейной жесткости материала на производительность изолятора. Показано, что нелинейное вязкое демпфирование не только уменьшает амплитуду высокочастотной вибрации, но и устраняет эффект скачка. Таким образом, нелинейное вязкое демпфирование имеет существенное преимущество перед линейным вязким демпфированием в виброизоляции даже при наличии нелинейной жесткости. Влияние нелинейного демпфирования, которое является функцией, как скорости, так и смещения, исследовано для изолятора с одной степенью свободы (SDOF) в статье [8]. Теоретически показано, что, когда используется только нелинейное демпфирование чисто кубического порядка без линейного демпфирования, передаваемая сила или смещение еще лучше. В работах [9] рассматривается влияние линейного и нелинейного кубического демпфирования материала упругой опоры с линейной и нелинейной жесткостью на динамику жесткого гироскопического несбалансированного ротора.

Оказывается, если линейное демпфирование сужает область нестабильности только вблизи резонансной скорости, то нелинейное кубическое демпфирование опоры сужает эту область и вдоль оси амплитуды вибрации, и вдоль оси скорости вращения вала ротора. В экспериментальной части работы [10] приведены результаты влияния совместного линейного и нелинейного кубического демпфирования опоры по существенному подавлению возвышенностей амплитуды частотной характеристики в резонансной области и за ней. В статье [11] численно исследуются нелинейные динамические характеристики и характеристики передаваемой силы гибкой системы вал-диск ротора, поддерживаемой системой подвески с нелинейной жесткостью и демпфированием. Метод гармонического баланса в сочетании со схемой продолжения используется для определения нелинейной частотной характеристики и кривых передачи силы из-за силы дисбаланса диска. Исследовано влияние нелинейности жесткости подшипника на динамику системы при поддержке жесткой и мягкой линейной жесткости подшипника и влияние нелинейности демпфирования подшипника и сравнивается с влиянием линейного демпфирования. Экспериментально подтверждаются эффекты линейного и нелинейного демпфирования вибрации резинового материала упругой опоры. Еще одним подтверждением полученных результатов в работах являются исследования, проводимые в статье [12] путем моделирования и эксперимента, в экспериментальной системе однодискового ротора, который поддерживается шарикоподшипниками на обоих концах. Сравниваются вибрации с гибкой опорой, содержащей пружины или резиновые листы, с жесткой опорной базой, как в работе [10, с. 532-537].

В статье [13] рассматривается динамический отклик системы с одной степенью свободы с нелинейной жесткостью и нелинейным демпфированием, которая подвергается как резонансному прямому возбуждению, так и резонансному параметрическому возбуждению, с общей фазой между ними. Здесь обобщаются и расширяются предыдущие исследования эффектов нелинейного демпфирования на параметрическое усиление.

Работа [14] посвящена исследованию эффекта нелинейного кубического вязкого демпфирования в системе виброизоляции, состоящей из магнитной пружины с положительной нелинейной жесткостью и механической наклонной пружины с геометрической нелинейной отрицательной жесткостью. Результаты показывают, что по сравнению с конкурирующей системой линейной виброизоляции описанная нелинейная система передает меньше вибраций вокруг резонансного пика.

В работах [15, 16] были исследованы влияния квадратичного нелинейного демпфирования на динамику гироскопического жесткого ротора с квадратичной или кубической нелинейной жесткостью упругой опоры. Сужение ширины области неустойчивости по мере увеличения величины нелинейного квадратичного демпфирования более заметно в области близкой к резонансной частоте. Хотя увеличение количества линейного вязкого демпфирования в системе снижает нелинейность, это отрицательно сказывается на области изоляции. Геометрически нелинейное демпфирование эффективно, когда отклик системы изоляции увеличивается; следовательно, область изоляции не затрагивается [17].

В обзоре [18] обсуждаются применения нелинейности в устройствах пассивного контроля вибрации, чтобы обеспечить понимание того, как нелинейность применяется и полезна в реализованной системе. Кроме того, приложения для нелинейности также могут быть расширены в устройствах сбора энергии, нелинейном приемнике энергии, метаматериалах с целью изоляции вибрации и сбора энергии. Нелинейная система сбора энергии демонстрирует широкие возможности для сбора энергии из широкого диапазона возбуждений. Так, например, в работе [19] нелинейный сток энергии (NES) относится к легкому нелинейному устройству, которое присоединяется к первичной линейной или слабонелинейной системе для пассивной локализации энергии внутри себя. В данной работе исследуется динамика NES с геометрически нелинейным затуханием с 1-степенью и 2-степенями свободы. В работе [20] изучалась установившаяся динамика роторной системы Джеффкотта с горизонтальной опорой при нелинейных восстанавливающих силах. Было изучено снижение вибрации ротора с помощью линейных настроенных демпферов массы, нелинейных поглотителей энергии и комбинированных поглотителей энергии. Результаты показали, что все три типа поглотителей обладают хорошими показателями по снижению вибрации первичной роторной системы. При более близком рассмотрении показано, что TMD-NES, TMD и NES соответственно обладают лучшими характеристиками в снижении вибрации. С другой стороны, комбинированные TMD-NES, NES и TMD дают, соответственно, более широкий частотный диапазон стабильности.

В последнее время нелинейная идентификация демпфирования (NDI) привлекает широкий исследовательский интерес и интенсивные исследования. Различные стратегии NDI, от обычных до более продвинутых, были разработаны для различных структурных типов. Обладая очевидными преимуществами перед классическими линейными методами, эти стратегии могут количественно определять нелинейные характеристики демпфирования, предоставляя мощные инструменты для анализа и проектирования сложных виброизоляционных систем. В ниже приводим некоторых из этих исследований.

В работе [21] представлена процедура для определения параметров нелинейного кубического демпфирования и геометрической жесткости модели с одной степенью свободы (SDOF) из колебаний большой амплитуды гармонически вынужденных непрерывных систем. Оценка параметров основана на методе гармонического баланса. Методология идентификации делится на случай (i) чистого отверждения и на случай (ii) поведения при размягчении. Независимая оценка нелинейной жесткости производиться по кривой позвоночника с последующей оценкой демпфирования при резонансе. В первом случае применяется метод наименьших квадратов с использованием экспериментально измеренной первой гармоники. Во втором случае новая каскадная процедура состоит из (i) оценки параметра одночленного гармонического баланса, используемой в качестве инициации (ii) минимизации расстояния между данными и двухчленной моделью гармонического баланса посредством генетического алгоритма. Эти процедуры подтверждаются идентификацией параметров на синтетических (полученных численно) и экспериментальных частотных характеристиках.

В статье [22] описывается динамическая модель с одной степенью свободы, в которой нелинейности, зависящие от смещения и скорости, представлены степенными законами. Модель предназначена для поддержки динамической идентификации структурных компонентов, подверженных гармоническому возбуждению. По сравнению с другими аналитическими выражениями, управляемая данными оценка нелинейных экспонент обеспечивает большую гибкость, что делает обобщенную модель адаптируемой для большого количества различных нелинейностей (квадратичной, сухого трения), как по жесткости, так и по демпфированию.

Систематическая классификация структур нелинейности, основанная на амплитудах отклика первой, второй и третьей гармоник при гармоническом возбуждении обсуждается в первой части статьи [23]. Во второй части типичная кубическая нелинейность демпфирования идентифицируется из кубической нелинейности жесткости и разрабатывается алгоритм оценки нелинейных и линейных параметров демпфирования.

В статье [24] представлена систематическая классификация нелинейности асимметричного демпфирования и разработан алгоритм оценки параметров с использованием гармонического возбуждения и амплитуды отклика в терминах функций частотной характеристики более высокого порядка. Асимметрия демпфирующей нелинейности моделируется как полиномиальная функция, содержащая квадратные и кубические нелинейные члены. Алгоритм оценки сначала представлен для нелинейных параметров, а затем он расширяется для оценки линейных параметров, включая коэффициент демпфирования.

В статье [25] для определения увеличения демпфирования с амплитудой вибрации для резиновой прямоугольной пластины использовались три различные модели рассеяния. Модели основаны на модифицированных осцилляторах Дуффинга с линейной, квадратичной и кубической жесткостью и: (i) линейным вязким демпфированием; (ii) нелинейной вязкоупругой диссипацией, описываемой коэффициентом потерь; (iii) стандартной линейной твердотельной вязкоупругой моделью с нелинейными пружинами. Сначала была построена модель пониженного порядка: линейное вязкое демпфирование на каждом уровне возбуждения в нелинейном режиме идентифицировано по экспериментальным данным измерения линейных и нелинейных характеристик с помощью лазерных доплеровских виброметров [26]. Затем три разные модели с одной степенью свободы были подогнаны к одним и тем же экспериментальным результатам. Диссипация, идентифицированная различными моделями, подтверждает основной нелинейный характер демпфирования, как функции амплитуды колебаний.

Экспериментальные данные работы [27] показывают сильную и нелинейную зависимость демпфирования от максимальной амплитуды колебаний, достигаемой за цикл для макро- и микроструктурных элементов. Значение нелинейного демпфирования более чем в шесть раз больше линейного, как должно ожидаться для вибрации тонких пластин, когда амплитуда вибрации примерно в два раза больше толщины. Исследование выводит нелинейное демпфирование из стандартной твердотельной модели с дробной вязкоупругостью, путем введения в нее геометрической нелинейности. Полученная модель демпфирования является нелинейной, и ее частотная зависимость может быть настроена с помощью дробной производной в соответствии с поведением материала.

Предлагаемый в работе [28] подход является параметрическим методом идентификации моделей нелинейного демпфирования механических систем с использованием стандартных экспериментальных методик, обычно применяемых для линейных систем. Идентифицированная модель действительна при общих силах возбуждения, предсказывая поведение системы в более широком диапазоне работы, чем линейная эквивалентная модель для конкретных испытаний.

Чтобы преодолеть ограничение, заключающееся в том, что с помощью частот скачков можно оценить только нелинейность жесткости, в работе [29] вводятся амплитуды скачков в качестве дополнительного условия при оценке нелинейностей жесткости и демпфирования. Предложенный метод позволяет оценивать параметры жесткости и демпфирования системы с сильными нелинейностями.

Обзорный документ [30] представляет собой обзор методов NDI, объясняя фундаментальные проблемы и возможности этих методов на основе доступной литературы. Кроме того, это исследование предлагает всесторонний обзор различных приложений и будущих направлений исследований NDI.

Несмотря на то, что исследования комбинированного влияния линейного и нелинейного кубического демпфирования на систему виброизоляции, процедуры по идентификации структуры нелинейностей и в дальнейшем проектирование виброизоляции для нелинейных систем, в т.ч. роторных, и при этом использование знаний о явлениях нелинейных скачков являются более реалистичным подходом, но имеющаяся литература, посвященная этой тематике, довольно ограничена. Поскольку текущая тенденция во многих приложениях NDI имеет тенденцию к более продвинутым приложениям, крайне необходимо работать над разработкой этих методов, чтобы идти параллельно (ноги в ногу) с этим прогрессом.

Нелинейное кубическое демпфирование не только расширяет область виброизоляции, но и используется для управления резонансными колебаниями ротора большими амплитудами и для выхода из области неустойчивости с прыжковым эффектом и эффектом Зоммерфельда или для ослабления и устранения этих эффектов.

Целью диссертационной работы является исследование динамики гироскопической роторной машины с нелинейными характеристиками, идеальным и неидеальным источниками энергии при учете анизотропии жесткости упругой опоры, ориентированное на создание принципиально новых классов энергоэкономных, виброиспользуемых и виброустойчивых машин с оптимальными параметрами и системой программного контроля.

Объектом исследования является центрифуга на базе вертикального жесткого гироскопического ротора.

Предметом исследования является влияние нелинейной жесткости, линейного и нелинейного демпфирования, анизотропии упругих и демпфирующих свойств опоры на отклик динамики гироскопического ротора.

В соответствии с поставленной целью были поставлены следующие **задачи исследования:**

– разработка физических и математических моделей новых гироскопических роторных машин с нелинейными характеристиками, идеальным и неидеальным источниками энергии для исследования динамики машины с учетом влияния анизотропии жесткости, линейного и нелинейного кубического демпфирования опоры на отклик и устойчивость роторной машины при учете характера технологического процесса и взаимодействий вибрационной системы с источником энергии;

– теоретическое и экспериментальное исследование влияния неравномерности линейной жесткости, линейного и нелинейного кубического демпфирования упругой опоры с нелинейной составляющей жесткости на амплитудно-частотную характеристику, передаваемость момента сил роторной системы при стационарных колебаниях, на колебания угловых перемещений при нестационарном режиме с целью подбора линейных и нелинейных упругих и демпфирующих характеристик материала опоры, обеспечивающих стабильную работу машины до критических скоростей, во время их прохождения и после критических скоростей;

– исследование влияния неравномерности линейной жесткости, линейного и нелинейного кубического демпфирования опоры на динамический момент двигателя, на требуемую мощность источника энергии и мощность нагрузки (рассеиваемую мощность демпфированием) для подбора вида и характеристик электродвигателя;

– Исследование регулярного движения до критических скоростей, нерегулярного движения во время и после прохождения критических скоростей, эффектов Зоммерфельда с нелинейными прыжками, других нелинейных эффектов в вибрационных роторных машинах с целью определения причин нерегулярного движения и путей их ослабления и устранения, для использования около резонансной области скорости вращения для одних вибрационных технологических процессов и для определения диапазона рабочих скоростей регулярного вращения для других технологических процессов в зависимости от требований технологического процесса и качества выпускаемой продукции;

– Определение областей неустойчивости и контроль колебаниями больших амплитуд и хаотическим движением вибрационных роторных машин с целью выбора диапазона рабочих скоростей устойчивого движения и для разработки методов контроля нерегулярным движением и создания устройства программного управления и контроля вибрацией.

Методы исследования: Описание основных научных вопросов и гипотез диссертационной работы, обоснование исследовательской стратегии и подходов, применяемые в работе типы исследований (описательные, корреляционные и/или экспериментальные), последовательность проведения исследований. Методы сбора первичной (исходной) информации, ее источники и применение для решения задач диссертационной работы, способы обработки данных, а также обеспечения их достоверности и воспроизводимости.

Научная новизна работы состоит:

– регулирования и оптимального подбора жесткости материала опоры и подавления резонансных и за резонансные амплитудные возвышенности и устранения нелинейных прыжковых эффектов;

– сужения границ областей неустойчивости движения;

– исследование влияния анизотропии линейной жесткости и нелинейного кубического демпфирования упругой опоры на динамику роторных машин, в т.ч. гироскопических, при учете нелинейной кубической составляющей жесткости.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Как известно, роторные машины широко применяются во многих отраслях промышленности и изучаются давно. Несмотря на это немало проблем, нерешенных, в частности, связанных с действием дисбаланса массы на колебания и устойчивость и впоследствии со стабилизацией и управлением резонансными колебаниями роторных машин.

Упрощенная модель с сосредоточенными параметрами роторной системы, как правило, используется для изучения динамики вала одного ротора на несущих опорах. Очень важно использование свойств и характеристик материала опор для затухания и демпфирования вибрации в целях стабилизации движения неуравновешенного ротора и вибрационных систем. Опоры являются средством подключения устройства между ротором и опорной конструкцией, которые имеют различные формы и конструкции, зависящие от конкретных предположений.

Для стабильной работы машины, кроме выбора оптимальной жесткости упругой опоры, необходимо обоснованное назначение точности изготовления элементов опоры. Правильный анализ работы упругой опоры позволит производить уточненный динамический расчет машины.

Полное отклонение ротора складывается из отклонения на упругой опоре и прогиба самого вала. При этом демпфироваться будут только отклонения упругой опоры. Поэтому для максимального демпфирования колебаний упругую опору желательно располагать в месте наибольшего прогиба, т.е. по возможности ближе к ротору.

Научные положения, выносимые на защиту:

– регулирования и оптимального подбора жесткости материала опоры и подавления резонансных и за резонансные амплитудные возвышенности и устранения нелинейных прыжковых эффектов;

– сужения границ областей неустойчивости движения;

– исследование влияния анизотропии линейной жесткости и нелинейного кубического демпфирования упругой опоры на динамику роторных машин, в т.ч. гироскопических, при учете нелинейной кубической составляющей жесткости.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации подтверждается применением апробированных методов механики и теории механизмов и машин, применением проверенных программных комплексов MATLAB и SolidWorks. Достоверность результатов подтверждается разработкой и изготовлением опытного образца центрифуги на базе жесткого гироскопического ротора, испытания которого показали хорошие совпадения с теоретическими результатами при различных режимах работы.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная диссертационная работа выполнялась в рамках научного проекта, по грантовому финансированию научных исследований молодых ученых по проекту «Молодой ученый» на 2022-2024 годы МНВО РК «Моделирование динамики гироскопического жесткого ротора центрифуги при анизотропии восстанавливающей и демпфирующей характеристики упругой опоры» (ИРН проекта: AP15473701).

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

– на Международной конференции «Asian IFToMM Mechanisms and Machine Sciences» (AsianMMS 2021, Hanoi, Vietnam);

– на Международной конференции «4th International Conference of IFToMM Italy» (IFIT 2022, Naples, Italy);

– на Международной конференции «6th International IFToMM Conference» (MeTrApp 2023, Poitier, France);

– на семинарах РГП «Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова» КН МНВО РК и КазНУ им. Аль-Фараби.

Публикации. Автором по теме диссертации опубликовано 6 работ, 5 публикация в зарубежных научных журналах с ненулевым импакт-фактором (IF) и трудах международных конференций, входящих в базу данных Scopus и Web of Science, 1 Евразийский патент на изобретение.

Личный вклад автора. Основные научные результаты теоретических и прикладных исследований, выводы, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве, соискателю принадлежит значительная часть, связанная с постановкой задач, разработкой алгоритмов и моделей, а также их программная реализация и проведение экспериментальных исследований.

Структура диссертации и объем. Диссертация имеет титульный лист, содержание, перечень обозначений и сокращений, введение, шесть разделов, заключение, список использованных источников и приложений. Общий объем диссертации 116 страниц, включая 99 иллюстраций и 1 таблица.

Основное содержание диссертации.

Во **введении** дано описание проблемы, краткий обзор предметной области. Обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы постановка задачи и этапы их решения.

Первый раздел посвящен моделированию динамики гироскопического жесткого ротора с линейным и нелинейным демпфированием и нелинейной жесткостью упругой опоры.

Во **втором** разделе рассматривается моделирование динамики гироскопического жесткого ротора с анизотропией восстанавливающих и демпфирующих характеристик упругой опоры.

В **третьем** разделе рассматриваются резонансные колебания неидеальной гироскопической роторной системы с нелинейными восстанавливающими и демпфирующими характеристиками.

В **четвертая глава** посвящена разработке опытного образца центрифуги на базе вертикального гироскопического жесткого ротора. Разработана 3D модель центрифуги на базе вертикального гироскопического жесткого ротора. На основе 3D модели получена проектно-конструкторская документация (ПКД) опытного образца центрифуги на базе вертикального гироскопического жесткого ротора, для изготовления опытного образца. Показано изготовление опытного образца центрифуги на базе вертикального гироскопического жесткого ротора.

В **пятом** разделе приводятся результаты экспериментальных исследовании опытного образца центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора. Проведены экспериментальные исследования опытного образца центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора. Показано исследование по влиянию анизотропии на динамику ротора.

В **заключении** приведены полученные в работе основные результаты и выводы по диссертационному исследованию.

Благодарность. Автор выражает благодарность своим научным консультантам к.т.н. Искакову Жарилкасину и PhD Jacek Cieslik за их консультации, ценные советы, объективную критику, поддержку и понимание на протяжении всего исследования.

Особую благодарность автор выражает профессору Тулешову Амандык Куатовичу, за поддержку, полезные рекомендации и предоставление экспериментальной базы для проведения опытно-экспериментальных работ.

Автор также хотел бы поблагодарить сотрудников Института механики и машиноведения Джамалова Нутпулла Камаловича, Бисембай Куатбай Бисембаевича и Камал Азиза Нутпуллаогли за их предложения, полезные рекомендации и комментарии в течение всего периода подготовки диссертационной работы.

1 МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА С ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ УПРУГОЙ ОПОРЫ

1.1 Уравнения движения

Рассматривается идеальная модель ротора, структурная схема которого представлена на рисунке 1. Вал с длиной L установлен вертикально с помощью нижней шарнирной и отстоящей от нее на расстояние l_0 l_0 верхней упругой опоры. На свободном конце вала закреплен диск, имеющий массу mm, полярным моментом инерции I_p и поперечным моментом инерции I_T, одинакового для любого направления. Скорость вращения вала ω настолько, чтобы ротора можно было рассматривать как гироскоп, неподвижной точкой которого является нижняя опора вала. Положение геометрического центра диска S определяется координатами x, y в неподвижной системе координат $Oxyz$, а положение вала и в целом ротора в пространстве углами Эйлера α , β и углом поворота φ. Углы α , β малы, движением ротора в направлении координатной оси z пренебрегаем. Далее обозначим координаты центра масс m диска через x_mи y_m. Предполагаем также, что линейный эксцентриситет e лежит по направлению оси N системы координат ONKZ. Ограничимся малыми отклонениями оси ротора.

Учитывая вышеизложенное, проекции угловой скорости на координатных осях можно записать в виде:

$$\omega_N = -\dot{\beta}, \omega_K = \dot{\alpha} \cos\beta\,, \omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin\beta.$$

Предполагая, что в случае малых углов α и β $\sin\beta \approx \beta, \cos\beta \approx 1$ предыдущие уравнения можно переписать следующим образом

$$\omega_N \approx -\dot{\beta}, \omega_K \approx \dot{\alpha}, \omega_Z \approx \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \cdot \beta. \qquad (1.1)$$

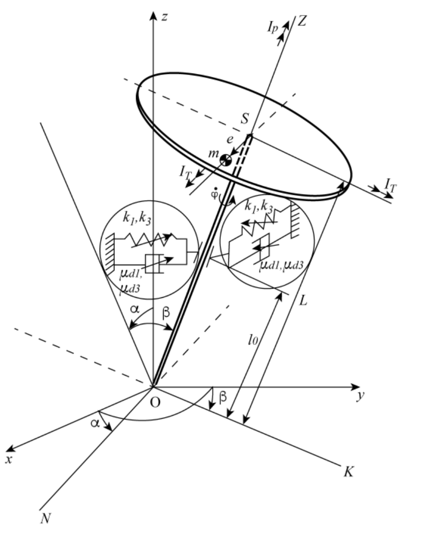


Рисунок 1.1 – Структурная схема ротора

На основании теоремы Кенига для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2}(I_K \omega_K^2 + I_N \omega_N^2 + I_Z \omega_Z^2).$$

Пологая, что $I_K = I_N = I_T, I_Z = I_P$ и принимая во внимание формулы (1.1), получим

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{1}{2} I_T(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} I_P(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\beta)^2, \quad (1.2)$$

где

$$x_m = x + e\cos\varphi = L\alpha + e\cos\varphi,$$
$$y_m = y + e\sin\varphi = L\beta + e\sin\varphi. \quad (1.3)$$

Проекции момента силы тяжести и силы инерции неуравновешенности массы имеют вид

$$M_K = (L\alpha + e\cos\varphi)G, M_N = (L\beta + e\sin\varphi)G, \quad (1.4)$$

где $G = mg$ – вес диска.

Ричардс и Сингх [3, с. 35-62] обнаружили, что резиновые амортизаторы имеют и нелинейное демпфирование, и нелинейную жесткость. Для достижения более высокой производительности следует принимать во внимание наличие нелинейностей в конструкции. Следовательно, упругая опора верхнего подшипника гироскопического ротора может быть изготовлена из нелинейных материалов, таких как из каучука, резины и других полимеров, широко используемых в качестве демпфера возникающих колебаний. Учитывая все это, зададим диссипативную энергию в упругой опоре в виде функции Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu_{d1}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{4}\mu_{d3}(\dot{\alpha}^4 + \dot{\beta}^4), \quad (1.5)$$

где μ_{d1} - коэффициент линейного вязкого демпфирования; μ_{d3} - коэффициент нелинейного кубического вязкого демпфирования. Если учесть, что вал ротора является жестким, и упругостью обладает только его верхняя опора, а силы упругости во взаимно перпендикулярных направлениях координат, соответственно равны $F_x = k_1 x_0 + k_3 x_0^3 = k_1 l_0 \alpha + k_3 l_0^3 \alpha^3$, $F_y = k_1 y_0 + k_3 y_0^3 = k_1 l_0 \beta + k_3 l_0^3 \beta^3$, тогда потенциальную энергию системы можно представить в виде

$$V = \frac{1}{2} k_1 l_0^2(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{4} k_3 l_0^4(\alpha^4 + \beta^4), \quad (1.6)$$

где k_1 - коэффициент жесткости опоры, k_3 – коэффициент в нелинейном члене упругой силы.

Уравнения Лагранжа второго рода для роторной системы представим в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i. \tag{1.7}$$

Здесь q_i - обобщенные координаты; Q_i - обобщенные силы; i=1, 2. Обобщенными координатами q_1, q_2являются α, β. Обобщенные силы Q_1, Q_2 представляются с помощью M_K, M_N и определяются по формулам (1.4).

Подставив выражение (1.2) с учетом (1.3) и выражения (1.4) - (1.6) в (1.7), получим уравнения для движения ротора

$$\begin{aligned}(I_T + mL^2)\ddot{\alpha} + I_P\omega\dot{\beta} + \mu_{d1}\dot{\alpha} + \mu_{d3}\dot{\alpha}^3 + (k_1 l_0^2 - GL)\alpha + k_3 l_0^4\alpha^3 = (me\omega^2 L + Ge)\cos\omega t,\\ (I_T + mL^2)\ddot{\beta} - I_P\omega\dot{\alpha} + \mu_{d1}\dot{\beta} + \mu_{d3}\dot{\beta}^3 + (k_1 l_0^2 - GL)\beta + k_3 l_0^4\beta^3 = (me\omega^2 L + Ge)\sin\omega t.\end{aligned} \tag{1.8}$$

В правой части системы уравнений (1.8) отброшены возмущения, содержащие $\ddot{\varphi}$, так как в области, близкой к резонансной скорости $\ddot{\varphi} \ll \omega^2$, и возмущения, имеющие параметр I_P (в дальнейшем предположим, что $I_P \ll I_T$) и величины второго и более высокого порядков малости относительно α, β, их производных, и их комбинаций. Указанные возмущения малы в сравнении с возмущениями, амплитуды которых пропорциональны ω^2.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\begin{gathered}\bar{e} = \frac{e}{L};\ l = l_0/L\,; \bar{t} = t\omega_0;\\ \Omega = \omega/\omega_0; \bar{I}_p = I_p/(mL^2)\,; \bar{I}_T = I_T/(mL^2); \bar{K}_1 = k_1/(m\omega_0^2)\,;\\ \bar{K}_3 = k_3 l_0^4/(mL^2\omega_0^2)\,; \bar{G} = G/(mL\omega_0^2)\,;\\ \bar{\mu}_1 = \mu_{d1}/(mL^2\omega_0)\,;\ \bar{\mu}_3 = \mu_{d3}\omega_0/(mL^2)\,,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 l_0^2 - GL}{mL^2 - (I_p - I_T)}} \tag{1.10}$$

- собственная частота роторной системы (1.8). Используя (1.9), придадим уравнениям движения (1.8) компактную безразмерную форму

$$\begin{aligned}(1 + \bar{I}_T)\alpha'' + \bar{I}_\text{p}\Omega\beta' + \bar{\mu}_1\alpha' + \bar{\mu}_3\alpha'^3 + (\bar{K}_1 l^2 - \bar{G})\alpha + \bar{K}_3\alpha^3 = \bar{e}(\Omega^2 + \bar{G})\cos\Omega\bar{t},\\ (1 + \bar{I}_T)\beta'' - \bar{I}_\text{p}\Omega\alpha' + \bar{\mu}_1\beta' + \bar{\mu}_3\beta'^3 + (\bar{K}_1 l^2 - \bar{G})\beta + \bar{K}_3\beta^3 = \bar{e}(\Omega^2 + \bar{G})\sin\Omega\bar{t}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь штрихом (′) обозначена производная по безразмерному времени $\bar{t}$.

После введения обозначения безразмерной собственной частоты линейной роторной системы при $\overline{I_T} \gg \overline{I_P}$

$$\sqrt{\frac{\bar{K}_1 l^2 - \bar{G}}{1 + \bar{I}_T}} = \omega_n \tag{1.12}$$

и следующих обозначений безразмерных динамических параметров колебательной системы

$$\frac{\bar{\mu}_1}{1+\bar{I}_T} = \mu_1, \frac{\bar{\mu}_3}{1+\bar{I}_T} = \mu_3, \frac{\bar{K}_3}{(1+\bar{I}_T)} = K_3,$$
$$\frac{\bar{I}_P}{1+\bar{I}_T} = I_{P1}, \frac{\bar{e}}{1+\bar{I}_T} = e_r \tag{1.13}$$

уравнениям движения (1.11) можно придавать следующий вид

$$\alpha'' + I_{P1}\Omega\beta' + \mu_1\alpha' + \mu_3{\alpha'}^3 + \omega_n^2\alpha + K_3\alpha^3 = e_r(\Omega^2 + \bar{G})\cos\Omega\bar{t},$$
$$\beta'' - I_{P1}\Omega\alpha' + \mu_1\beta' + \mu_3{\beta'}^3 + \omega_n^2\beta + K_3\beta^3 = e_r(\Omega^2 + \bar{G})\sin\Omega\bar{t}. \tag{1.14}$$

Рассмотрим роторную систему, близкую к линейной. Тогда становится очевидным и метод решения уравнений движения (1.14) – это один из асимптотических методов, например, метод медленно изменяющихся амплитуд (VAM) [31]. Для возможности применения метода медленно изменяющихся амплитуд принимаются следующие ограничения. Проекции моментов демпфирующих сил $\mu_1\alpha', \mu_1\beta'$ и $\mu_3{\alpha'}^3, \mu_3{\beta'}^3$, а также момента кубической составляющей восстанавливающей силы $K_3\alpha^3, K_3\beta^3$, моментов силы инерции неуравновешенности массы и силы тяжести $e_r(\Omega^2 + \bar{G})\cos\Omega\bar{t}, e_r(\Omega^2 + \bar{G})\sin\Omega\bar{t}$ считаются малыми по сравнению с другими моментами сил, действующих в системе. При предположении, что $\overline{I_P} \ll \overline{I_T}$ можно считать малыми и проекции момента пассивной гироскопической силы $I_{P1}\Omega\alpha'$ и $I_{P1}\Omega\beta'$. Ограничимся также рассмотрением быстровращающегося ротора: $\Omega^2 \gg \bar{\bar{G}}$ и движения в области резонанса, где частота свободных колебаний ω_n близка к частоте вынужденных колебаний Ω, т. е. $\xi = \varepsilon\xi_1 = \Omega - \omega_n \ll \omega_n$. Здесь малый параметр $\varepsilon \ll 1$.

Уравнения (14), при малых значениях величины ξ и принятыми ограничениями задачи примут следующий вид:

$$\alpha'' + \Omega^2\alpha = e_r\Omega^2\cos\Omega\bar{t} - I_{P1}\Omega\beta' - \mu_1\alpha' - \mu_3{\alpha'}^3 - K_3\alpha^3 + 2\xi\alpha,$$
$$\beta'' + \Omega^2\beta = e_r\Omega^2\sin\Omega\bar{t} + I_{P1}\Omega\alpha' - \mu_1\beta' - \mu_3{\beta'}^3 - K_3\beta^3 + 2\xi\beta. \tag{1.15}$$

Уравнения (1.15) являются системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно α, β.

1.2 Решения уравнений движения и их анализ

Так как мы хотим исследовать вынужденные основные резонансные колебания, будем искать решения (15) на частоте вынуждающего момента:

$$\alpha = A(\bar{t})cos[\Omega\bar{t} + \theta(\bar{t})], \tag{1.16}$$
$$\beta = A(\bar{t})sin[\Omega\bar{t} + \theta(\bar{t})]. \tag{1.17}$$

Здесь $A(\bar{t})$ - медленно изменяющаяся амплитуда, $\theta(\bar{t})$ – сдвиг фазы колебаний относительно вынуждавшегося гармонического момента.

Введем новые переменные $\frac{d\alpha}{d\bar{t}}$ и $\frac{d\beta}{d\bar{t}}$:

$$\frac{d\alpha}{d\bar{t}} = -A\Omega sin(\Omega\bar{t} + \theta) \text{ и } \frac{d\beta}{d\bar{t}} = A\Omega cos(\Omega\bar{t} + \theta). \quad (1.18)$$

Эти переменные не есть результат дифференцирования α и β по времени $\bar{t}$, ибо истинные производные от α и β по $\bar{t}$, имеют вид

$$\frac{d\alpha}{d\bar{t}} = \frac{dA}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \theta) - A\left(\Omega + \frac{d\theta}{d\bar{t}}\right) sin(\Omega\bar{t} + \theta), \quad (1.19)$$

$$\frac{d\beta}{d\bar{t}} = \frac{dA}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \theta) + A\left(\Omega + \frac{d\theta}{d\bar{t}}\right) cos(\Omega\bar{t} + \theta). \quad (1.20)$$

Поэтому для согласования с выражениями (18) нам приходится полагать

$$\frac{dA}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \theta) - A\frac{d\theta}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \theta) = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{dA}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \theta) + A\frac{d\theta}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \theta) = 0. \quad (1.22)$$

Эти соотношения можно рассматривать как дополнительные условия, накладываемые на переменные A и θ. Тогда, система укороченных уравнений, применяемая в ММА, будет выглядеть как

$$A' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\Omega}[e_r\Omega^2 \cos\Omega\bar{t} + (2\xi\Omega - I_{P1}\Omega^2)Acos(\Omega\bar{t} + \theta) + \mu_1\Omega Asin(\Omega\bar{t} + \theta) + \mu_3\Omega^3A^3sin^3(\Omega\bar{t} + \theta) - K_3A^3cos^3(\Omega\bar{t} + \theta)]\ sin(\Omega\bar{t} + \theta)d\bar{t}, \quad (1.23)$$

$$A\theta' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\Omega}[e_r\Omega^2 \cos\Omega\bar{t} + (2\xi\Omega - I_{P1}\Omega^2)Acos(\Omega\bar{t} + \theta) + \mu_1\Omega Asin(\Omega\bar{t} + \theta) + \mu_3\Omega^3A^3sin^3(\Omega\bar{t} + \theta) - K_3A^3cos^3(\Omega\bar{t} + \theta)]\ cos(\Omega\bar{t} + \theta)d\bar{t}. \quad (1.24)$$

После выполнения интегрирования уравнений (1.23) и (1.24) приходим к системе уравнений нестационарных колебаний ротора

$$A' = -\frac{1}{2}e_r\Omega sin\theta - \frac{1}{2}\mu_1 A - \frac{3}{8}\mu_3\Omega^2A^3, \quad (1.25)$$

$$A\theta' = -\frac{1}{2}e_r\Omega cos\theta - \frac{1}{2}(2\xi - I_{P1}\Omega)A + \frac{3}{8\Omega}K_3A^3. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.25) и (1.26) также могут быть получены с использованием соотношений (1.17), (1.18), (1.22) и метода ММА (метод малых амплитуд) применительно ко второму уравнению системы (1.15).

Стационарные режимы движения определяются при условиях $\dot{A} = 0$ и $\dot{\theta} = 0$ уравнениями

$$-\frac{1}{2}e_r\Omega sin\theta_0 = \frac{1}{2}\mu_1 A_0 + \frac{3}{8}\mu_3\Omega^2 A_0^3, \qquad (1.27)$$

$$\frac{1}{2}e_r\Omega cos\theta_0 = -\frac{1}{2}(2\xi - I_{P1}\Omega)A_0 + \frac{3K_3}{8\Omega}A_0^3. \qquad (1.28)$$

Из уравнений (1.27) и (1.28) с использованием обозначения расстройки частоты с поправкой с учетом пассивного гироскопического момента $\xi^* = \xi - \frac{1}{2}I_{P1}\Omega$ следует выражение для определения амплитуды стационарных колебаний

$$\left[\left(\mu_1\Omega + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^3 A_0^2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}K_3 A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right)^2\right]A_0^2 = (e_r\Omega^2)^2. \qquad (1.29)$$

На рисунках 1.2 и 1.3 приведены резонансные кривые на плоскости $(A_0,\ \xi^*)$ для различных значений коэффициента линейного демпфирования $\mu_1 = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ при $\mu_3 = 0$, K3=0.05 и коэффициента нелинейного кубического демпфирования $\mu_3 = 0.010, 0.020, 0.043, 0.060$ при $\mu_1 = 0.01$, K3=0.1, соответственно. Отчетливо видно, когда μ_1 равно или больше некоторого значения $\mu_1^* = 0.03$, и μ_3 равно или больше некоторого значения $\mu_3^* = 0.043$ резонансные кривые напоминают резонансные кривые линейной роторной системы с линейным демпфированием. Если μ_1 равно или меньше некоторого значения $\mu_1^* = 0.03$, и μ_3 равно или меньше некоторого значения $\mu_3^* = 0.043$ максимум резонансных кривых смещен в сторону больших скоростей вращения вала, если собственная частота нелинейной роторной системы с ростом амплитуды колебаний растет (так называемый жесткий материал упругой опоры $K_3 > 0$). Если же с ростом амплитуды колебаний собственная частота нелинейной роторной системы убывает (мягкий материал упругой опоры $K_3 < 0$), то максимум резонансных кривых смещается в сторону меньших скоростей вращения вала. Хорошо заметно существенное подавление пика амплитуды колебаний в резонансной области под совместным влиянием линейного и нелинейного кубического демпфирования упругой опоры.

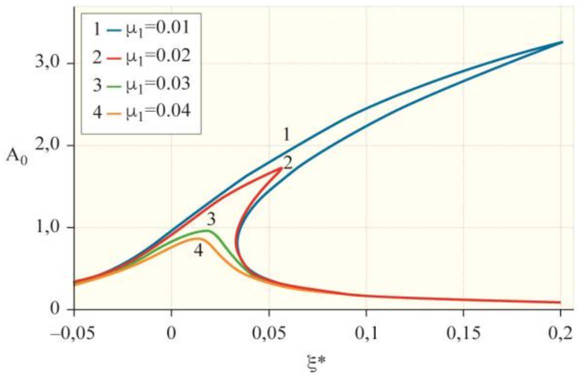


Рисунок 1.2 - Нелинейные резонансные кривые ротора с K3 =0.05 и μ3 =0 при различных значениях μ1 опоры

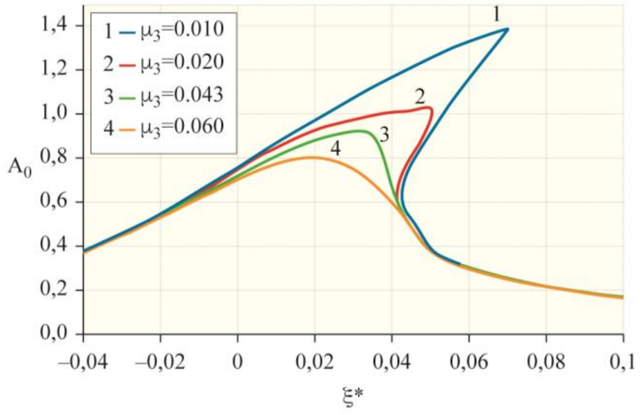


Рисунок 1.3 - Нелинейные резонансные кривые ротора с К3 =0.1 и μ1 =0.01 при различных значениях μ3 опоры

Анализ устойчивости различных ветвей резонансных кривых на рисунках 1.4 и 1.5 показывают, что средняя ветвь, отмеченная пунктиром от точки 1 до точки 2, неустойчива.

При изменении расстройки, двигаясь вдоль кривой слева направо, будем наблюдать следующее. При $\xi^* = 0$ – точный резонанс по линейному приближению – амплитуда колебаний далеко не максимальна. Максимум амплитуды A_{0m} наблюдается для некоторого значения расстойки $\xi^* > 0$. При дальнейшем возрастании растойки и при $\xi^* = \xi_1^*$ амплитуда падает, происходит прыжок колебаний до существенно меньшей амплитуды. При обратном ходе расстройки прыжок происходит при $\xi^* = \xi_2^* < \xi_1^*$ и амплитуда при этом резко возрастает. Значения амплитуд A_{01} и A_{02}, при которых происходит прыжки, определяется из уравнения

$$\frac{dA_0}{d\xi^*} = \infty \qquad (1.30)$$

(в точках A_{01} и A_{02} касательная к резонансной кривой вертикально).

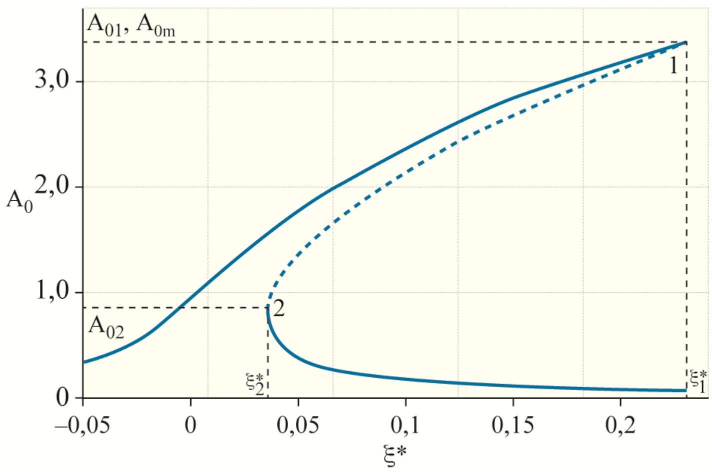


Рисунок 1.4 - Нелинейные резонансные кривые ротора с бистабильной областью с К3 =0.05 и μ3 =0 при μ1=0.01 опоры

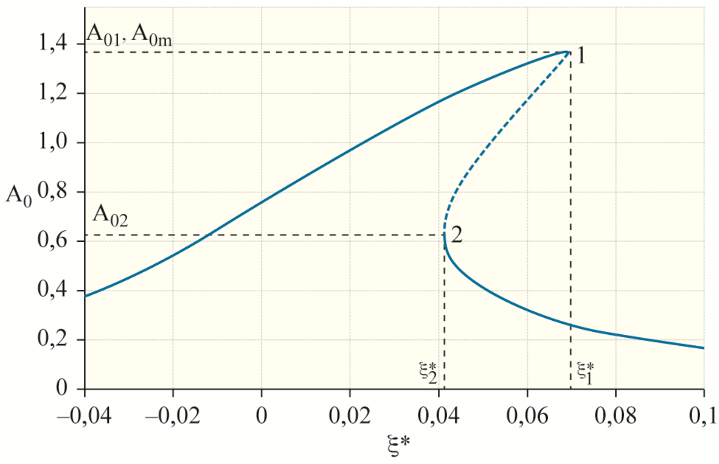


Рисунок 1.5 - Нелинейные резонансные кривые ротора с бистабильной областью с K3 =0.1 и μ1 =0.01 при μ3=0.01 опоры

Для определения ξ_1^*, ξ_2^*, A_{01} и A_{02} продифференцируем по ξ^* уравнение (1.29), помня, что от ξ^* зависит только A_0:

$$\frac{dA_0}{d\xi^*} = \frac{2\Omega\left(\frac{3}{4}K_3A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right)A_0}{\left(\mu_1\Omega + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^3A_0^2\right)\left(\mu_1\Omega + \frac{9}{4}\mu_3\Omega^3A_0^2\right) + \left(\frac{3}{4}K_3A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right)\left(\frac{9}{4}K_3A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right)}. \tag{1.31}$$

Значения ξ_1^* и ξ_2^*, A_{01} и A_{02} можно найти из совместного решения уравнения

$$\left(\mu_1\Omega + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^3A_0^2\right)\left(\mu_1\Omega + \frac{9}{4}\mu_3\Omega^3A_0^2\right) + \left(\frac{3}{4}K_3A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right)\left(\frac{9}{4}K_3A_0^2 - 2\xi^*\Omega\right) = 0 \tag{1.32}$$

и уравнения (1.29) для резонансной кривой. Корни ξ_1^* и ξ_2^* уравнения (1.32) должны удовлетворять условия положительного дискриминанта при $9K_3^2 - 27\mu_3^2\Omega^6 > 0$.

Величины коэффициентов демпфирования μ_1^* и μ_3^* при которых на резонансных кривых появляется гистерезис или полностью устраняются прыжковые эффекты, определяются из условия равенства корней (1.32)

$$\xi_1^* = \xi_2^* = \frac{3K_3A_0^2}{4\Omega}, \tag{1.33}$$

т.е. обращения в нуль его дискриминанта

$$(9K_3^2 - 27\mu_3^2\Omega^6)A_0^4 - 48\mu_1\mu_3\Omega^4A_0^2 - 16\mu_1^2\Omega^2 = 0. \tag{1.34}$$

Здесь величина K_3 входит в уравнение (1.34) в квадрате и, следовательно, это уравнение выполнимо и в случае $K_3 > 0$, и в случае $K_3 < 0$.

При $\mu_3 = 0$ из (1.34) следует

$$A_0^2 = \frac{4\mu_1\Omega}{3K_3}. \quad (1.35)$$

Подставив (1.35) в (1.33), получим

$$\xi_1^* = \xi_2^* = \mu_1^*. \quad (1.36)$$

Подставив (1.35) и (1.36) в (1.29), найдем

$$\mu_1^* = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3e_r^2(\pm K_3)\Omega.} \quad (1.37)$$

При $\mu_1 = 0$ из (1.34) найдем

$$\mu_3^* = \frac{\pm K_3}{\sqrt{3}\Omega^3}. \quad (1.38)$$

В выражениях (1.37) и (1.38) знак “плюс” соответствует жесткой характеристике упругости, знак “минус” – мягкой характеристике упругости материала опоры.

По формулам (1.37) и (1.38) можно судить о том, что чем больше величин e_r и K_3, тем больше потребуется демпфирование материала упругой опоры для устранения прыжкового эффекта.

При данных $\mu_3 = 0$, $e_r = 0.0346$ и $K_3 = 0.05$ коэффициент линейного демпфирования материала опоры $\mu_1^* = 0.0282 \approx 0.03$, при данных $\mu_1 = 0$, $e_r = 0.0346$ и $K_3 = 0.1$ коэффициент нелинейного кубического демпфирования материала опоры $\mu_3^* = 0.0577$.

Приравнивая выражение (1.31) для производной $dA_0/d\xi^*$ нулю, находим значение максимальной амплитуды колебаний

$$A_{0m}^2 = \frac{8\,\xi^*\Omega}{3K_3}$$

Тогда из (1.29) следует

$$0.75\mu_3\Omega^2A_{0m}^3 + \mu_1A_{0m} - e_r\Omega = 0 \quad (1.39)$$

и

$$A_{0m} = \sqrt[3]{\frac{e_r}{1.5\mu_3\Omega} + \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{2.25\mu_3\Omega^2}\right)^3 + \left(\frac{e_r}{1.5\mu_3\Omega}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{e_r}{1.5\mu_3\Omega} - \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{2.25\mu_3\Omega^2}\right)^3 + \left(\frac{e_r}{1.5\mu_3\Omega}\right)^2}}. \quad (1.40)$$

При $\mu_3 = 0$ из (1.39) получиться

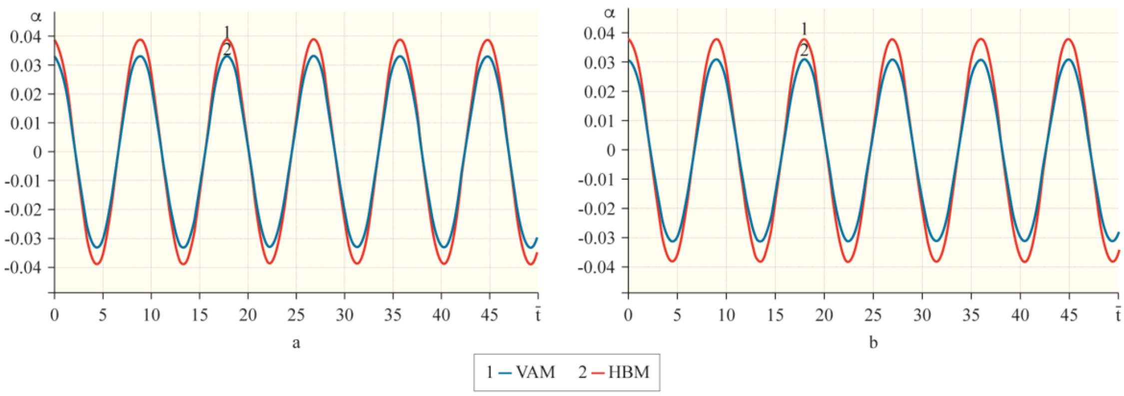
$$A_{0m} = \frac{e_r \Omega}{\mu_1}, \tag{1.41}$$

а при $\mu_1 = 0$ из (1.39) следует

$$A_{0m} = \sqrt[3]{\frac{e_r}{0.75\mu_3\Omega}}. \tag{1.42}$$

Анализируя формулы (1.41) и (1.42), можно сказать, что чем больше эксцентриситета массы ротора, тем больше максимальной амплитуды и для подавления максимальной амплитуды потребуется значительное демпфирование материала упругой опоры.

Отклики гироскопической роторной системы в решениях уравнений движения разными методами можно увидеть в осциллограммах угла поворота вала $\alpha = \alpha(\bar{t})$, приведенных на рисунке 1.6, при $K_3 = 0.05$ и линейном демпфировании с $\mu_1 = 0.04$ (случай a) и при $K_3 = 0.1$ и совместном демпфировании с $\mu_3 = 0.043, \mu_1 = 0.01$ (случай b). Угловая скорость вала $\Omega = 0.7$, остальные параметры ротора ранее приведены. Имеется хорошее согласие между результатами, небольшое отличие в максимальной величине откликов объясняется тем, что в методе изменяющейся амплитуды (VAM) размах колебаний усредненный, а при использовании метода гармонического баланса (HBM) ограничились главной гармоникой разложении решений уравнений движения при одинаковой начальной фазе колебаний. На рисунке 1.6 b очевиден эффект совместного демпфирования в сравнении с рисунке 1.6 a.



a – $K_3 = 0.05$ и линейном демпфировании с $\mu_1 = 0.04$,

b – $K_3 = 0.1$ и совместном демпфировании с $\mu_3 = 0.043, \mu_1 = 0.01$.

Рисунок 1.6 - Отклики гироскопической роторной системы в решениях уравнений движения разными методами

1.3 Устойчивость стационарного движения

Для рассмотрения устойчивости стационарного движения роторной системы уравнения (1.25) и (1.26) приводим к следующему виду

$$\frac{dA}{d\bar{t}} = \Phi(A,\theta), \frac{d\theta}{d\bar{t}} = \Psi(A,\theta), \qquad (1.43)$$

где

$$\Phi(A,\theta) = -\frac{1}{2}e_r\Omega sin\theta - \frac{1}{2}\mu_1 A - \frac{3}{8}\mu_3\Omega^2 A^3 \qquad (1.44)$$

и

$$\Psi(A,\theta) = -\frac{1}{2A}e_r\Omega cos\theta - \xi^* + \frac{3K_3}{8\Omega}A^2 \qquad (1.45)$$

- некоторые гладкие функции переменных A, θ.

В стационарном движении, т.е. при $A = A_0$ и $\theta = \theta_0$ правые части системы уравнений (1.43) обращаются в нуль. Зададим малые отклонения от точки равновесия $\eta = A - A_0, \zeta = \theta - \theta_0$ и разложим в ряд функции $\Phi(A,\theta)$ и $\Psi(A,\theta)$ в малой окрестности $A = A_0$ и $\theta = \theta_0$, ограничиваясь первыми степенями по A и θ. Тогда система уравнений (1.43) может быть записана в виде

$$\dot{\eta} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial A}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_0 \zeta, \qquad (1.46)$$

$$\dot{\zeta} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial A}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_0 \zeta, \qquad (1.47)$$

где производные

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial A}\right)_0 = -\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{9}{8}\mu_3 A_0^2,\\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_0 = -\frac{1}{2}e_r\Omega cos\theta_0,\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial A}\right)_0 = \frac{1}{2A_0^2}e_r\Omega cos\theta_0 + \frac{3}{4\Omega}K_3 A_0,\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_0 = \frac{1}{2A}e_r\Omega sin\theta_0\end{gathered} \qquad (1.48)$$

взяты в точке равновесия. Задавая решения данной системы уравнений в виде $\eta \sim e^{\lambda \sim e^{\lambda\bar{t}}\bar{t}}, \zeta \sim e^{\lambda\bar{t}}$, для определения характеристического показателя λ получаем следующие уравнения

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial A}\right)_0 - \lambda\right]\eta + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_0 \zeta = 0, \qquad (1.49)$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A}\right)_0 \eta + \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_0 - \lambda\right]\zeta = 0. \qquad (1.50)$$

Для того чтобы однородная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо потребовать равенства нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial A}\right)_0 - \lambda & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_0\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial A}\right)_0 \eta & \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)_0 - \lambda\end{vmatrix} = 0. \qquad (1.51)$$

Отсюда

$$\lambda^2+\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{9}{8}\mu_3\Omega^2A_0^2-\frac{1}{2A_0}e_r\Omega sin\theta_0\right)\lambda-\frac{1}{2A_0}e_r\Omega sin\theta_0\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{9}{8}\mu_3\Omega^2A_0^2\right)+\frac{1}{2}e_r\Omega cos\theta_0\left(\frac{1}{2A_0^2}e_r\Omega cos\theta_0+\frac{3}{4\Omega}K_3A_0\right)=0$$

и (1.52)

$$\lambda_{1,2}=\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{9}{8}\mu_3\Omega^2A_0^2-\frac{1}{2A_0}e_r\Omega sin\theta_0\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mu_1+\frac{9}{8}\mu_3\Omega^2A_0^2+\frac{1}{2A_0}e_r\Omega sin\theta_0\right)^2-4\frac{1}{2}e_r\Omega cos\theta_0\left(\frac{1}{2A_0^2}e_r\Omega cos\theta_0+\frac{3}{4\Omega}K_3A_0\right)}.$$

С учетом (1.27) и (1.28) выражение (1.52) приходит к виду

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\left(\mu_1+\frac{3}{2}\mu_3\Omega^2A_0^2\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\left[\xi^*-\left(\frac{3K_3}{4\Omega}-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2\right]\left[\xi^*-\left(\frac{3K_3}{4\Omega}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2\right]}$$

(1.53)

Корни характеристического уравнения определяют устойчивость или неустойчивость состояния равновесия. Из (1.53) можно видеть, что при

$$\xi^*<\left(\frac{3K_3}{4\Omega}-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2 \text{ и при } \xi^*>\left(\frac{3K_3}{4\Omega}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2$$

корни λ1,2 комплексные, и состояние равновесия представляет собой устойчивый фокус. При

$$\left(\frac{3K_3}{4\Omega}-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2<\xi^*<\left(\frac{3K_3}{4\Omega}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2$$

корни вещественные. В этом случае корень λ_2 отрицателен, так что состояние может быть либо устойчивым узлом, либо седлом. Смена характера устойчивости происходит при λ_1, т.е. при

$$\left[\xi^*-\left(\frac{3K_3}{4\Omega}-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2\right]\left[\xi^*-\left(\frac{3K_3}{4\Omega}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{K_3^2}{\Omega^2}+\mu_3^2}\right)A_0^2\right]=-\left(\mu_1+\frac{3}{2}\mu_3\Omega^2A_0^2\right)^2.$$

(1.54)

Теперь определим области существования особых точек. Для этого характеристическое уравнение (1.51) приводим в форму детерминанта матрицы Якоби [32]:

$$\lambda^2-S\lambda+J=0, \tag{1.55}$$

где,

$$S = -\left(\mu_1 + \tfrac{3}{2}\mu_3\Omega^2 A_0^2\right) \tag{1.56}$$

и

$$J = \left(\mu_1 + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^2 A_0^2\right)\left(\mu_1 + \frac{9}{4}\mu_3\Omega^2 A_0^2\right) + \left[\tfrac{3K_3}{4\Omega}A_0^2 - (2 - I_{P1})\Omega + 2\omega_n\right]\left[\tfrac{9K_3}{4\Omega}A_0^2 - (2 - I_{P1})\Omega + 2\omega_n\right] \quad (1.57).$$

Решая уравнение (1.55), получаем два корня,

$$\lambda_1 = S/2 + \sqrt{S^2/4 - J} \text{ и } \lambda_2 = S/2 - \sqrt{S^2/4 - J}. \tag{1.58}$$

Предположим сначала, что дискриминант уравнения (1.55) положительный. Тогда оба собственные числа действительные и различные. Если оба собственных числа отрицательны, то возмущение с течением времени затухает и стремиться к нулю, т.е. роторная система приближается к особой точке, называемой устойчивой точкой. Если хотя бы одно собственное число больше нуля, то соответствующая составляющая возмущения будет нарастать, т.е. роторная система будет уходить от особой точки, называемой неустойчивой точкой.

Пусть теперь дискриминант уравнения (1.55) отрицательный. Тогда оба собственных числа комплексные, $\lambda_{1,2} = S/2 \pm i\sqrt{J - S^2/4}$, причем одно получается из другого посредством операции комплексного сопряжения. Зависимость возмущений от времени в этом случае определяется выражением вида $exp(\lambda'\bar{t})cos(\lambda''\bar{t} + \varphi)$, где λ'- действительная, а $\lambda'' -$ мнимая часть собственного числа. Особая точка устойчива, если действительная часть $\lambda' < 0$, и неустойчива, если $\lambda' > 0$.

Основной интерес представляют типичные ситуации, которым отвечают внутренние точки, показанных на Рис. 7 областей. Особые роли играют линия $S = 0$, в окрестности которой “живут” консервативные системы и линия $J = 0$. Подчеркнем, что для особой точки “центр” коэффициенты демпфирования $\mu_1 = 0$ и $\mu_3 = 0$ и следовательно ось J является разделительной линией областей диссипативных систем с положительным демпфированием и систем отрицательным демпфированием. Положение оси S определяется условием $J = 0$, т.е. критерием устойчивости:

$$\left(\mu_1 + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^2 A_0^2\right)\left(\mu_1 + \frac{9}{4}\mu_3\Omega^2 A_0^2\right) + \left[\tfrac{3K_3}{4\Omega}A_0^2 - (2 - I_{P1})\Omega + 2\omega_n\right]\left[\tfrac{9K_3}{4\Omega}A_0^2 - (2 - I_{P1})\Omega + 2\omega_n\right] = 0 \quad (1.59).$$

Следовательно, ось S является с одной стороны осью совместного влияния линейного и нелинейного кубического демпфирования, т.к. она определяется выражением (1.56), а с другой стороны - границей областей устойчивости (устойчивого фокуса и устойчивого узла) и неустойчивости (седла) во II и III квадрантах, где $\mu_1 > 0$ и $\mu_3 > 0$.

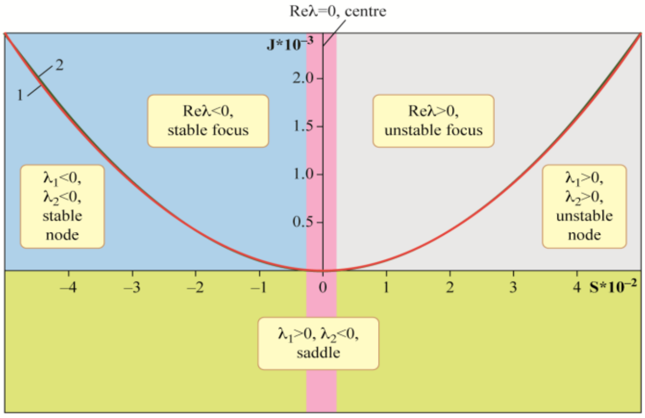


Рисунок 1.7 - Области особых точек с граничными линиями устойчивого (неустойчивого) фокуса и устойчивого (неустойчивого) узла при 1 - $\mu_1 = 0.01, \mu_3 = 0$ и 2 - $\mu_1 = 0.01, \mu_3 = 0.01$

Из Рисунка 1.7 можно заметить, что при совместном линейном и нелинейном кубическом демпфировании граничные линии областей устойчивого (неустойчивого) фокуса и устойчивого (неустойчивого) узла незначительно смещены к центру, что показывает слабую нелинейность рассматриваемой гироскопической роторной системы.

Таким образом, из детерминанта матрицы Якобы получили критерий устойчивости (1.59), который также можно получить из условия, что вертикальная касательная к резонансной кривой соответствует границе устойчивости:

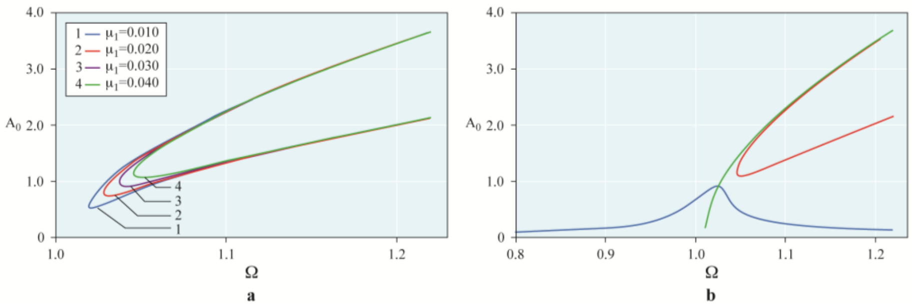
$$\frac{d\Omega}{dA_0} \approx \frac{\partial F}{\partial A_0} = 0, \tag{1.60}$$

где,

$$F = \left\{\left(\mu_1\Omega + \frac{3}{4}\mu_3\Omega^3A_0^2\right)^2 + \left[\frac{3}{4}K_3A_0^2 - (2 - I_{P1})\Omega^2 + 2\omega_n\Omega\right]^2\right\}A_0^2 - (e_r\Omega^2)^2 = 0 \tag{1.61}$$

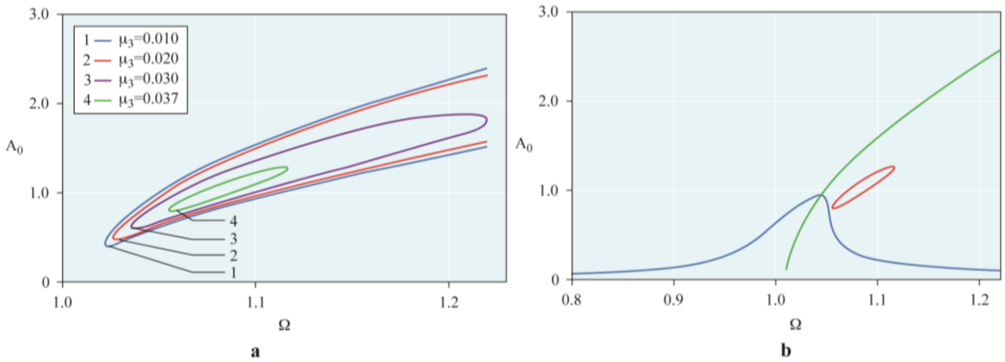
является уравнением частотной характеристики колебательной гироскопической роторной системы.

Границы областей неустойчивости при различных характеристиках жесткости нелинейной упругости опоры и различных значениях коэффициентов демпфирования представлены на рисунках 1.8 - 1.11. В случае жесткой характеристики нелинейной упругости опоры увеличение значения коэффициента линейного демпфирования смещает левую границу области неустойчивости в сторону больших амплитуд колебаний и скоростей вращения вала (рисунок 1.8a). После устранения прыжковых эффектов область неустойчивости становиться “оторванной” от частотной характеристики роторной системы, и будет существовать в части пространства за резонансной скоростью вращения (рисунок 1.8b). При этом верхняя ее граница практически будет совпадать с позвоночной кривой. Нелинейное кубическое демпфирование материала опоры совместно его линейным демпфированием сужает область неустойчивости со всех ее границ (рисунок 1.9a). При отсутствии прыжковых эффектов область неустойчивости может располагаться значительно ниже позвоночной кривой, и ее размеры могут существенно уменьшаться в зависимости от величины совместного демпфирования (рисунок 1.9b) и даже она может полностью исчезать, так, например, при $\mu_3 = 0.03788$ и $\mu_1 = 0.01$ и при остальных известных данных величин. В случае мягкой характеристики нелинейной упругости опоры характер влияния линейного демпфирования и нелинейного кубического демпфирования на границы области неустойчивости одинаков: увеличение значений коэффициентов демпфирования незначительно смещает околорезонансную правую границу области неустойчивости в сторону меньших скоростей вращения вала (рисунки 1.10a и 1.11b). Отличие состоит в том, что под влиянием нелинейного кубического демпфирования ординаты нижней и верхней границ области неустойчивости значительно смещены вниз. На рисунках 1.10b и 1.11b приведены расположения границ области неустойчивости относительно частотной характеристики с позвоночной кривой. Если рисунок 1.10b подобен рисунку 1.8b, только с отличием отклонения кривых в другую сторону, то нарисунке 1.11b резонансная кривая имеет участок нелинейного прыжка и охваченный небольшим участком граничных линий области неустойчивости. Таким образом, если линейное демпфирование смещает левую границу зоны неустойчивости в область больших амплитуд и скоростей вращения вала, то совместное линейное и нелинейное кубическое демпфирование ее полностью устраняет. В решениях уравнений движения (1.15) методом изменяющейся амплитуды усредненные значения максимального отклика системы в стационарном режиме мало отличаются от значений реальной переменной амплитуды. Следовательно, с использованием данного метода отображение границы устойчивого движения системы является более реалистичным. В области неоднозначности резонансная кривая имеет три ветви, границы между которыми определяются из условия (1.30). При этом условии соотношение (1.32) принимает вид (1.54). Следовательно, промежуточная ветвь соответствует неустойчивым состояниям равновесия, а верхняя и нижняя ветви – устойчивым состояниям. На рисунках 1.4 и 1.5 неустойчивая ветвь обозначена штрихом.



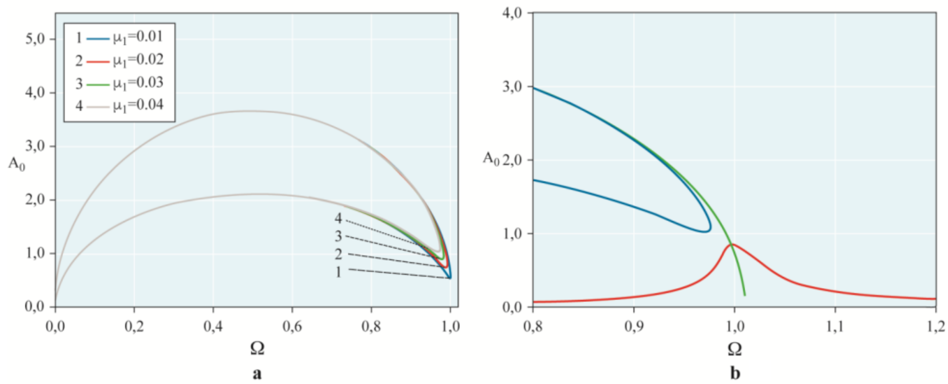
a - области неустойчивости при $\mu_3 = 0$ и $K_3 = 0.05$ и различных значениях μ_1, b - область неустойчивости и частотная характеристика ротора с позвоночной кривой при $\mu_3 = 0$, $K_3 = 0.05$ и $\mu_1 = 0.04$.

Рисунок 1.8 - Области неустойчивости



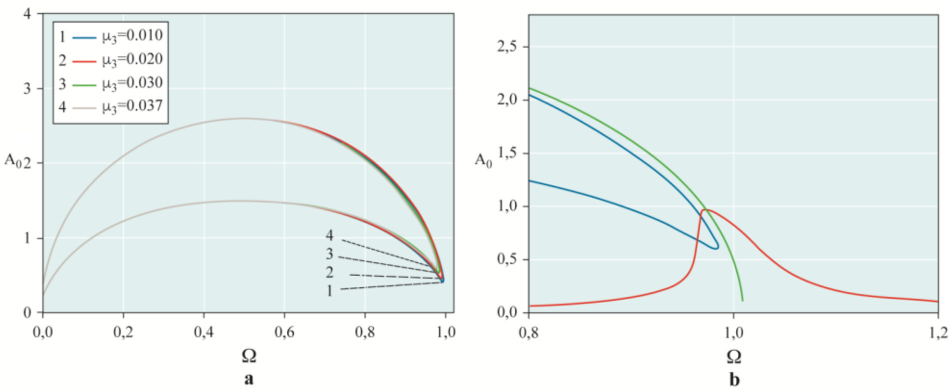
a - области неустойчивости при $\mu_1 = 0.01$ и $K_3 = 0.1$ и различных значениях μ_3, b - область неустойчивости и частотная характеристикой ротора с позвоночной кривой при $\mu_1 = 0.01$, $K_3 = 0.1$ и $\mu_3 = 0.037$.

Рисунок 1.9 - Области неустойчивости



a - области неустойчивости при $\mu_3 = 0$ и $K_3 = -0.05$ и различных значениях μ_1, b - область неустойчивости и частотная характеристика ротора с позвоночной кривой при $\mu_3 = 0$, $K_3 = -0.05$ и $\mu_1 = 0.04$.

Рисунок 1.10 - Области неустойчивости



a - области неустойчивости при $\mu_1 = 0.01$ и $K_3 = -0.1$ и различных значениях μ_3, b - область неустойчивости и частотная характеристикой ротора с позвоночной кривой при $\mu_1 = 0.01$, $K_3 = -0.1$ и $\mu_3 = 0.037$.

Рисунок 1.11 - Области неустойчивости

В области, где реализуется гистерезис, нелинейная роторная система демонстрирует бистабильность. Это соответствует наличию в фазовом пространстве двух сосуществующих аттракторов, один из которых отвечает вынужденным колебаниям малой, а второй – большой амплитуды. Возникновение одного или другого режима зависит от начальных условий. Множество точек фазового пространства, при запуске из которых траектория приходит к одному определенному аттрактору. Так, например, на рисунках 1.12 – 1.17 осциллограммы $\alpha = \alpha(\bar{t}), \beta = \beta(\bar{t})$ и фазовые траектории $\alpha' = \alpha'(\alpha)$, $\beta' = \beta'(\beta)$, качественно показывают переходной процесс из начальных условий: $\bar{t} = 0$: $\Omega_0 = 1.070, A_0 = 1.157, \theta_0 = 0.7365$ к аттрактору меньшей амплитуды стационарных колебаний. В переходном процессе отмечаются затухающие биения. Приведенные на рисунках 1.16 и 1.17 траектории ротора показывает, что в переходном процессе в аттрактор они представляют с течением времени наклоняющиеся, скручивающиеся по часовой стрелке и уменьшающиеся по размерам эллипсообразные спирали. Осциллограммы углов отклонения, фазовые траектории и траектории ротора были построены по результатам численных решений системы уравнений движения ротора (1.15) с помощью пакета MathLab-Simulink. При этом использованы следующие значения параметров системы: er=0.0346, ωn≈1, IP1=0.021, K3=0.1, μ1=0.01, μ3=0.01. Увеличение значения коэффициента нелинейного кубического демпфирования до $\mu_3^* = 0.043$ при $\mu_1 = 0.01$ не повлияло на поведение переходного процесса.

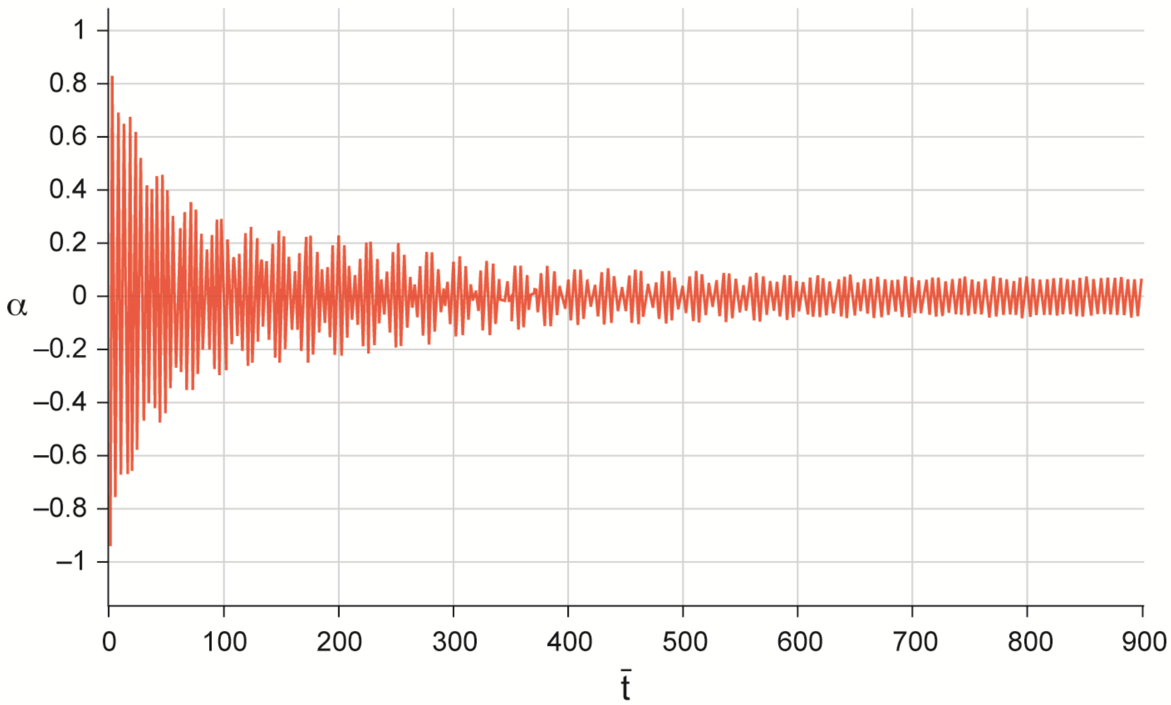


Рисунок 1.12 - Осциллограмма $\alpha = \alpha(\bar{t})$ переходного процесса из начальных условий в аттрактор меньшей амплитуды

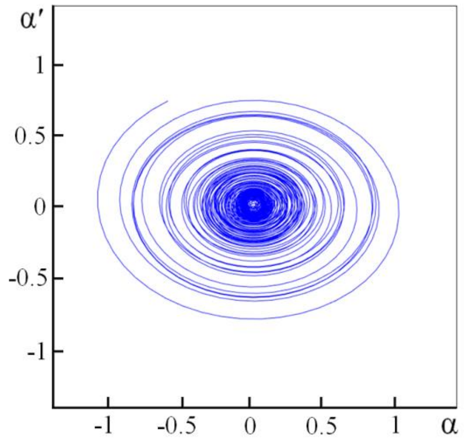


Рисунок 1.13 - Фазовые траектории $\alpha' = \alpha'(\alpha)$ переходного процесса из начальных условий в аттрактор меньшей амплитуды

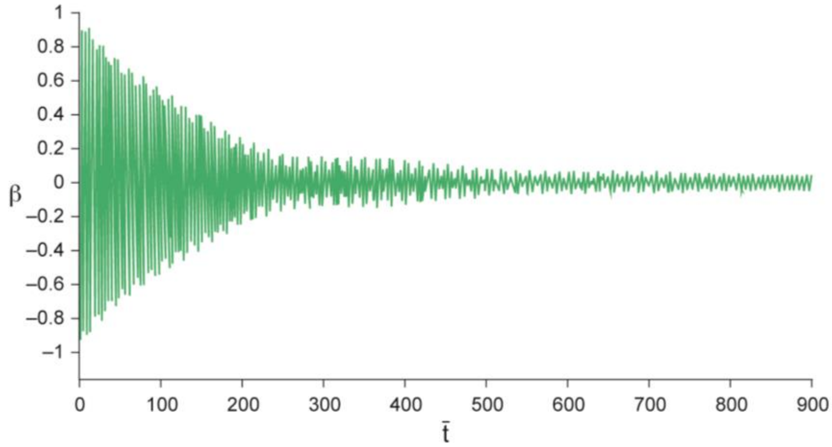


Рисунок 1.14 - Осциллограмма $\beta = \beta(\bar{t})$ переходного процесса из начальных условий в аттрактор меньшей амплитуды

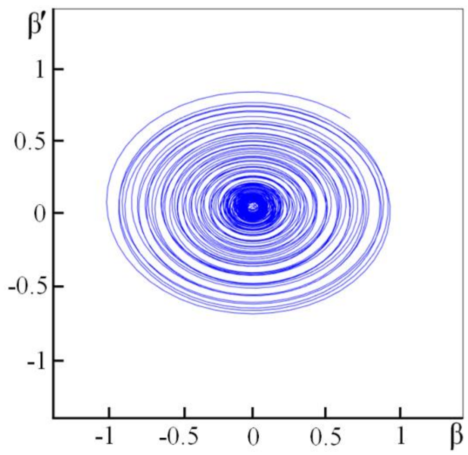


Рисунок 1.15 - Фазовые траектории $\beta' = \beta'(\beta)$ переходного процесса из начальных условий в аттрактор меньшей амплитуды

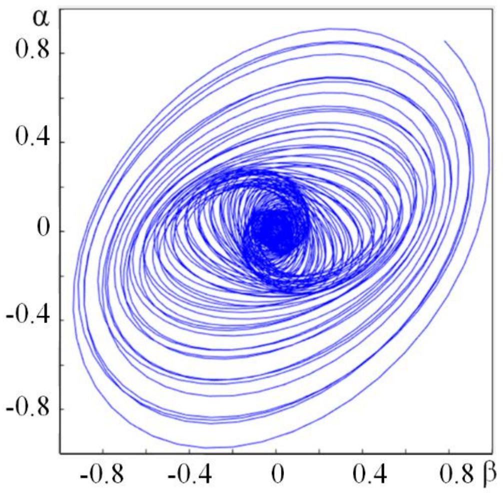
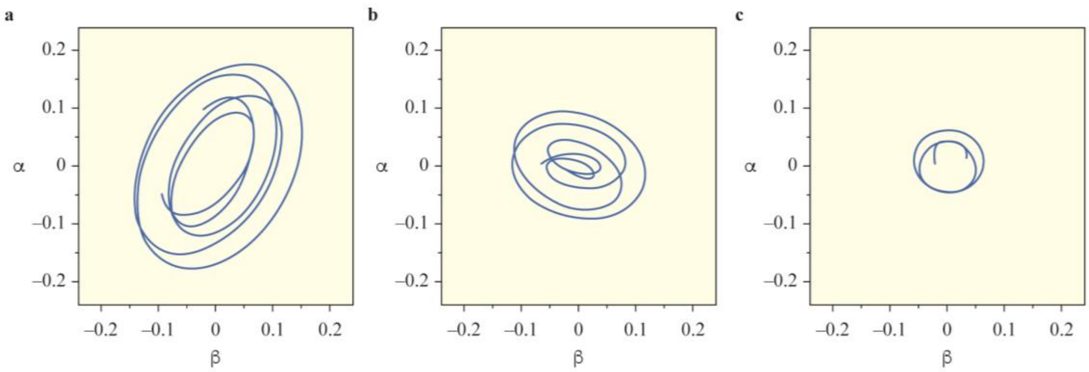


Рисунок 1.16 - Изменение траектории системы при переходе из начальных условий в аттрактор меньшей амплитуды

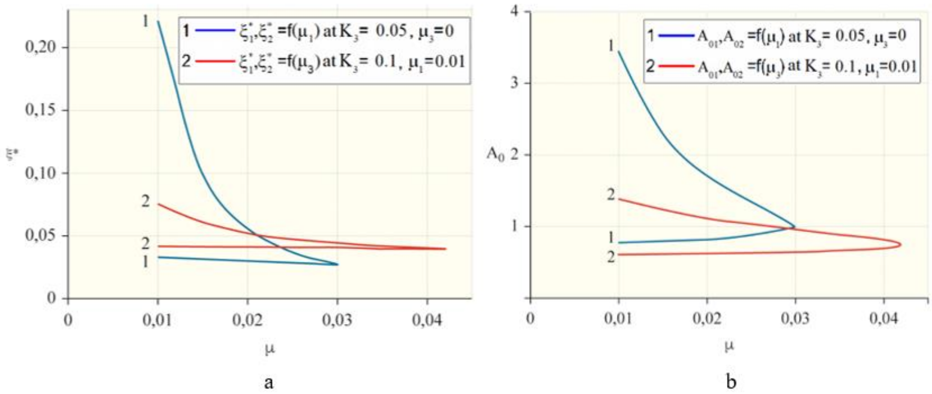


а - $\bar{t} = 306.5 \div 327.2, b - \bar{t} = 425.1 \div 445.5, c - \bar{t} = 700.5 \div 714.5.2.$

Рисунок 1.17 - Траектория ротора $\alpha = \alpha(\beta)$, соответствующая одному циклу колебаний и промежутку времени

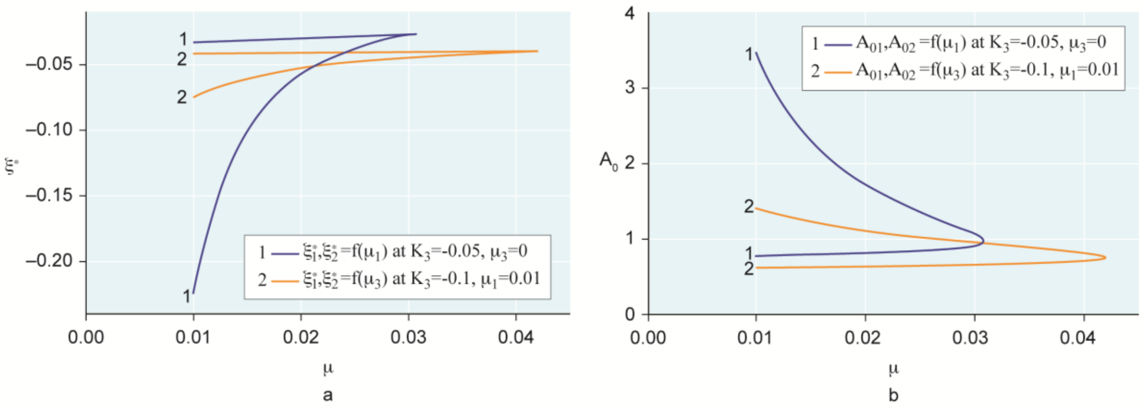
Представление поведения системы на плоскостях параметров (ξ^*, μ_i) и (A_0, μ_i) является полезным, где i = 1, 3. На рисунках 1.18 и 1.19 показаны соответствующие диаграммы, где по оси абсцисс отложены значения коэффициентов линейного и нелинейного кубического демпфирования опоры, по оси ординат – значения расстройки (частоты воздействия) и значения амплитуды колебаний, соответственно. Область бистабильности ограничиваются двумя линиями со значениями расстройки ξ_1^* и ξ_2^*, амплитуды колебаний A01 и A02, каждая из которых соответствует одному из корней уравнений (1.32) (или (1.54)) и (1.29). Из рисунков 1.18 и 1.19 видно, что по мере роста значений коэффициентов линейного демпфирования или нелинейного кубического демпфирования при постоянном значении линейного демпфирования ширина области бистабильности (гистерезиса) сужается, расстояние между прыжками (аттракторами) уменьшается, и граничившие линии пересекается в точке $\xi_1^* = \xi_2^*$, A01= A02 со значениями μ_1^* и μ_3^*, соответственно, прыжки (аттракторы) исчезают.

Изменение характеристики нелинейной упругости опоры приводит к изменению координат граничных кривых в плоскости (ξ^*, μ), а характер зависимостей A_{01}, A_{02}=f(μ_i), $i = 1, 3$ остается неизменным. Очевидно существенное совместное влияние линейного и нелинейного кубического демпфирования материала опоры.



a – ξ_1^*, ξ_2^*=f(μ_i), b – A_{01}, A_{02}=f(μ_i), $i = 1, 3$.

Рисунок 1.18 - Границы бистабильной области ротора с опорой жесткой характеристикой нелинейной упругости в зависимостях



a – ξ_1^*, ξ_2^*=f(μ_i), b - A_{01}, A_{02}=f(μ_i), $i = 1, 3$.

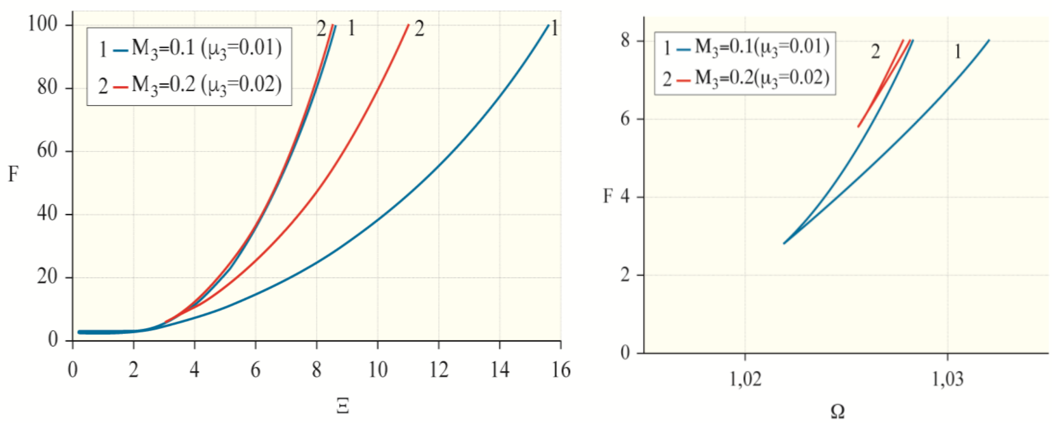
Рисунок 1.19 - Границы бистабильной области ротора с опорой мягкой характеристикой нелинейной упругости в зависимостях

Рассмотрим еще один из способов представления поведения роторной системы на плоскости ее параметров. Для этого рассмотрим случай, когда угловые скорости вращения вала Ω и ωn близки и с обозначениями $A^* = \frac{3K_3A_0^2}{4\mu_1\Omega}, F = \frac{3K_3(e_r\Omega^2)^2}{4\mu_1^3\Omega^3}, \Xi = \frac{2\xi^*}{\mu_1}, M_3 = \frac{\mu_3\Omega^3}{K_3}$ приводим уравнение резонансной кривой (1.29) к следующему виду

$$A^* \left[(1 + M_3A^*)^2 + (A^* - \Xi)^2\right] = F. \quad (1.62)$$

На рисунке 1.20 показаны диаграммы при различных значениях нормированного коэффициента нелинейного кубического демпфирования M_3 опоры. В диаграммах по оси абсцисс отложена нормированная частота воздействия Ξ, по оси ординат – нормированная амплитуда воздействия F. Картину можно мыслить, как совокупность частично перекрывающихся листов, каждый из которых отвечает одному из корней уравнения (1.62) при определенном значении μ_3 и заданных значениях $e_r, \mu_1 = 0.01, K_3 = 0.1$ и $\Omega \approx \omega_n \approx 1$. Область перекрытия листов есть область бистабильности, ограниченная двумя линиями складок, которые сходятся вместе в точке, называемой точкой сборки [32]. Линии складок и точка сборки находятся аналогичными методами, как ранее находили ξ_1^* и ξ_2^*.

Если двигаться по плоскости параметров вдоль горизонтальной линии F=const, то зависимости интенсивности колебаний A^* от параметров расстройки Ξ будут даваться резонансными кривыми семейства при различных значениях $M_3 = 0.1, 0.2$ (μ3=0.01, 0.02), представленного на рисунке 1.3. Если рассматриваемая горизонтальная линия проходит ниже точки сборки, то зависимость амплитуды от расстройки однозначная. Если же она проходит выше точки сборки, то появляется область неоднозначности, или гистерезиса. Она ограничена точками Ξ_1 и Ξ_2 (ξ_1^* и ξ_2^*), где касательная к резонансной кривой вертикальна, это те самые точки, где линия F=const пересекается с линиями складок. Момент первого появления вертикальной касательной к резонансной кривой в точке $\Xi_1 = \Xi_2$ ($\xi_1^* = \xi_2^*$) отвечает точке сборки. Из графиков на рисунке 1.20 также видно сужение ширины области бистабильности по мере роста коэффициента нелинейного кубического демпфирования и расширение этой области по мере увеличения амплитуды момента силы инерции неуравновешенности массы по отношению постоянных моментов нелинейной силы упругости и линейной силы демпфирования.



a b

Рисунок 1.20 - Влияние нелинейного кубического демпфирования опоры на линии складок (a) и точку сборки (b) параметров нелинейного гироскопического ротора

1.4 Нестационарные колебания

Для исследования нестационарных процессов уравнения (1.25) и (1.26) приводим к виду

$$\frac{dA}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2}e_r\Omega sin\theta - \frac{1}{2}\mu_1 A - \frac{3}{8}\mu_3\Omega^2 A^3, \quad (1.63)$$

$$\frac{d\theta}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2A}e_r\Omega cos\theta - \left(\Omega - \omega_n - \frac{1}{2}I_{P1}\Omega\right) + \frac{3}{8\Omega}K_3A^2. \quad (1.64)$$

Уравнения (1.63) и (1.64) описывают нестационарные процессы, когда правые их части не обращаются в нуль и когда процессы развиваются в резонансной области. В таких нестационарных процессах A, θ будут медленно изменяющимися функциями времени $\bar{t}$, что следует из структуры уравнений (1.63) и (1.64). Уравнение (1.63) описывает изменение амплитуды колебаний – поведение огибающей колебательного процесса угловых координат α и β; уравнение (1.64) описывает изменение начальной фазы колебательного процесса θ.

Отправляясь от некоторых начальных условий, роторная система будет стремиться к ближайшему устойчивому стационарному режиму движения.

Начальные условия задачи – при $\bar{t} = 0$ значения $A = A_0, \theta = \theta_0$ удобно выбирать близкими к их резонансным или максимальным значениям в стационарных режимах движения.

Функции A, θ легко получить путем численного интегрирования уравнений (1.63) и (1.64).

При численном интегрировании уравнений (1.63), (1.64) и (1.14) в резонансной области было принято, что безразмерный статический эксцентриситет er=0.0346, безразмерный полярный момент инерции диска IP1=0.021, безразмерная собственная частота колебаний ротора ωn≈1, безразмерный коэффициент нелинейной жесткости K3=0.1, коэффициент линейного демпфирования, μ1=0.01.

Выберем начальные условия: $\bar{t}$=0: 1) Ω=1.0423, A= 1.10863, θ=0.6611 при μ3=0.01; 2) Ω=1.0423, A= 1.0631, θ=0.9913 при μ3=0.02; 3) Ω=1.0423, A=0.9150, θ=1.5080 при μ3=0.043.

В дальнейшем для построения осциллограмм колебаний угловых координат уравнения (1.16) и (1.17), уравнения (1.19) и (1.20) с учетом (1.25) и (1.26) представим в виде

$$\alpha = A(\bar{t})cos[\Omega\bar{t} + \theta(\bar{t})], \quad (1.65)$$

$$\alpha' = \frac{dA}{d\bar{t}}cos(\Omega\bar{t} + \theta) - A\left(\Omega + \frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)sin(\Omega\bar{t} + \theta), \quad (1.66)$$

$$\beta = A(\bar{t})sin[\Omega\bar{t} + \theta(\bar{t})], \quad (1.67)$$

$$\beta' = \frac{dA}{d\bar{t}}sin(\Omega\bar{t} + \theta) + A\left(\Omega + \frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)cos(\Omega\bar{t} + \theta). \quad (1.68)$$

Результаты интегрирования системы уравнений (1.63) и (1.64) в резонансной области с учетом начальных условий представлены в виде графиков

$A = A(\bar{t})$ и $\theta = \theta(\bar{t})$ при различных значениях коэффициента нелинейного кубического демпфирования μ3=0.01, 0.02, 0.043 и μ1=0.01, K3=0.1 на рисунке 1.21 и рисунке 1.22. При всех значениях μ3 с течением времени $\bar{t}$ параметры A, θ начинают колебаться, так, например, амплитуда А сначала уменьшается, а затем, достигнув минимума, станет увеличиваться,

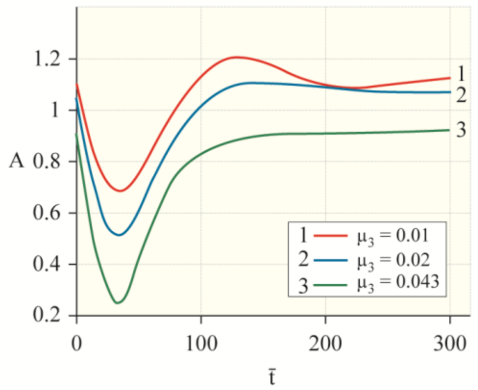


Рисунок 1.21 - Зависимость амплитуды A нестационарных колебаний от времени $\bar{t}$ при различных значениях μ_3 и при μ_1=0.01

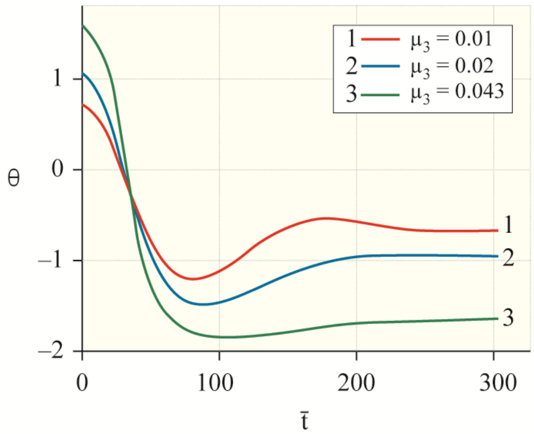


Рисунок 1.22 - Зависимость начальной фазы θ нестационарных колебаний от времени $\bar{t}$ при различных значениях μ_3 и при μ_1=0.01

стремясь к следующему стационарному значению, притом к большим значениям, чем начальные значения, т.к. начальные значения были взяты меньше максимальных значений. Ход изменения начальной фазы колебаний θ с течением времени $\bar{t}$ аналогичный, но стремятся к меньшим значениям, чем начальные значения.

Достоверность полученных результатов достигается способом сопоставления результатов численного решения системы дифференциальных уравнений движения ротора (1.15) с результатами численного решения дифференциальных уравнений нестационарных колебаний ротора (1.63) и (1.64). Из рисунка 1.23 видно хорошее согласие между этими результатами.

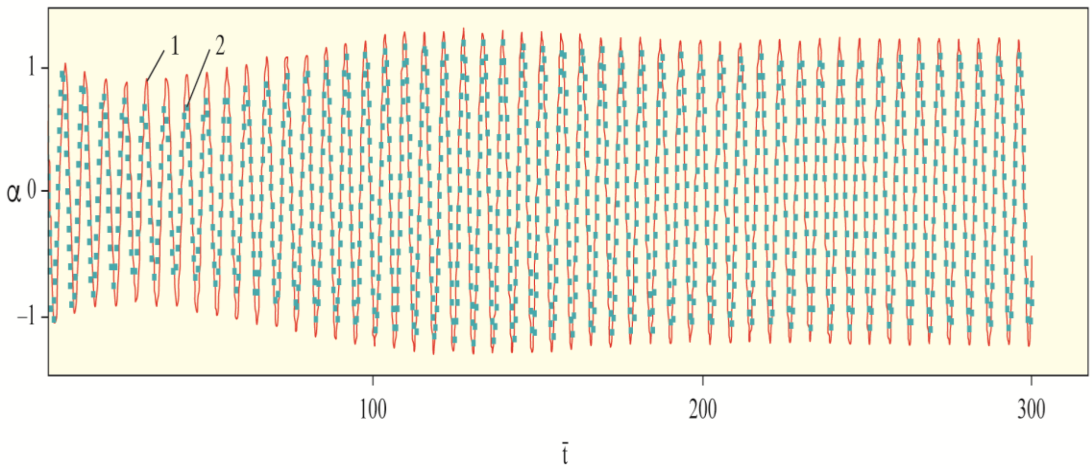
Осциллограммы колебаний $\alpha = \alpha(\bar{t})$ ротора при различных значениях коэффициента нелинейного кубического демпфирования μ3=0.01, 0.02, 0.043 и μ1=0.01, K3=0.1 по численным решениям дифференциальных уравнений нестационарных колебаний ротора (1.63) и (1.64) приведены на рисунке 1.24, по численным решениям системы дифференциальных уравнений движения ротора (1.15) - на рисунке 1.25. В обоих решениях хорошо видно эффект демпфирования величины μ3 в конечных стационарных значениях амплитуды A, куда стремятся ее начальные значения в ходе нестационарного процесса.

При всех численных решениях уравнений нестационарного процесса и системы уравнений движения ротора были использованы пакеты MathLab и MathLab-Simulink.

Чтобы проиллюстрировать влияние величины нелинейного кубического демпфирования опоры на развитие колебательного процесса при переходе через резонансную область рассмотрим расчет нестационарного режима движения роторной системы при предположении, что скорость вращения вала Ω также является “медленно” увеличивающимся параметром по закону $\Omega = \Omega_0 + \nu\bar{t}$ [33]. Уравнения переходного процесса (A4) и (A5), (A6) и (A7) (см. Приложение A) моделировались в пакете Mathlab-Simulink.

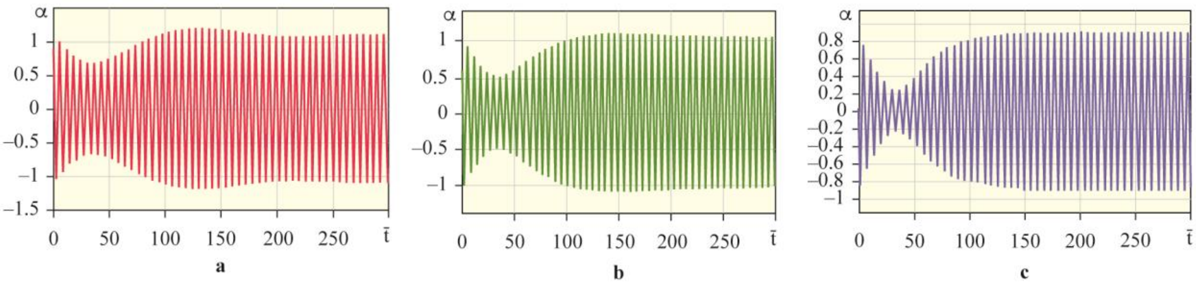
Параметры системы имеют следующие значения: er=0.0346, ωn≈1, IP1=0.021, μ1=0.01.

Выберем начальные условия при K_3=0.1 и $\bar{t} = 0$: 1) Ω0=0.81, A0= 0.067, θ0=-0.02521 при μ3=0.01; 2) Ω0=0.79, A0= 0.06254, θ0=-0.02297 при μ3=0.02; 3) Ω0=0.79, A0= 0.0625381, θ0=-0.0230614 при μ3=0.043.



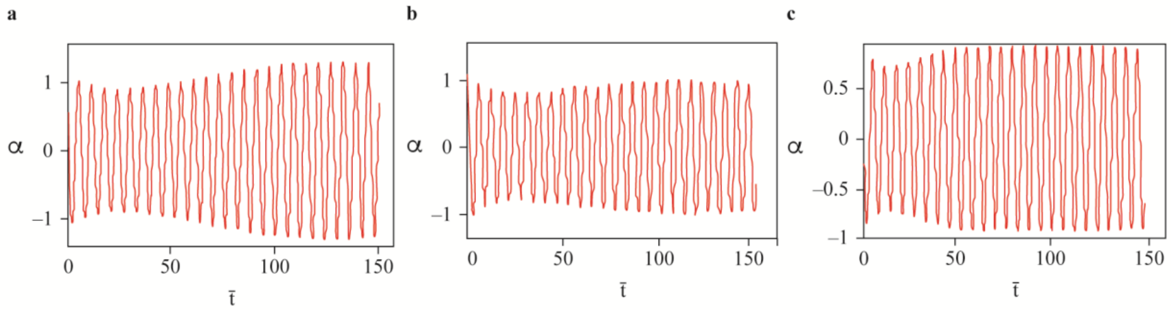
1 - по результатам численного решения системы дифференциальных уравнений движения ротора (1.15); 2 – по результатам численного решения дифференциальных уравнений нестационарных колебаний ротора (1.63) и (1.64).

Рисунок 1.23 - Осциллограммы угловой координаты вала ротора α при μ_3=0.01 и при μ_1=0.01



$a - \ \mu_3 = 0.01, b - \ \mu_3 = 0.02, \ c - \ \mu_3 = 0.043$ и при μ_1=0.01 по результатам численного решения дифференциальных уравнений нестационарных колебаний ротора (1.63) и (1.64).

Рисунок 1.24 - Осциллограммы угловой координаты вала ротора α при различных значениях



$a - \ \mu_3 = 0.01, b - \ \mu_3 = 0.02, \ c - \ \mu_3 = 0.043$ и при μ_1=0.01 по результатам численного решения системы дифференциальных уравнений движения ротора (1.15).

Рисунок 1.25 - Осциллограммы угловой координаты вала ротора α при различных значениях

Принимаем начальные условия при K_3=-0.1 и $\bar{t} = 0$: 1) Ω0=0.80, A0= 0.0664575, θ0=-0.0240624 при μ3=0.01; 2) Ω0=0.79, A0= 0.0626448, θ0=-0.0230045 при μ3=0.02; 3) Ω0=0.79, A0= 0.0626447, θ0=-0.0231013 при μ3=0.043.

Ось абсциссы имеет две шкалы: шкалу Ω и соответствующую шкалу времени $\bar{t}$. Резонансные кривые нестационарных колебаний ротора, построенные по результатам моделирования уравнений (А4) и (А5), (А6) и (А7) приведены на рисунках 1.26 – 1.28. Из всех графиков отчетливо видно, что увеличение величины нелинейного кубического демпфирования упругой опоры μ3 от значения 0.01 до значения 0.043 подавляет не только максимальную амплитуду отклика системы и ее вариацию около среднего значения, но и амплитуду вибрации, и ее вариацию и скоростью вращения, соответствующей максимуму амплитуды. Оно смещает скорость вращения вала, соответствующая максимальной амплитуде при жесткой нелинейной упругой характеристике ($K_3 > 0$) материала опоры в сторону уменьшения, а при мягкой нелинейной упругой характеристике ($K_3 < 0$)

материала опоры в сторону увеличения. Аналогичный эффект был получен при линейном демпфировании.

Из рисунка 1.26 видно, что при увеличении величины ν от 0.00025 до 0.0005 при жесткой нелинейной характеристике упругости ($K_3 > 0$) опоры максимум амплитуды смещается в сторону высоких скоростей вращения и ее величина уменьшается. Сопоставление рисунка 1.27 с рисунком 1.26 показывает идентичность результатов решений уравнений переходного процесса до усреднения (А4) и (А5) с результатами решений уравнений переходного процесса после усреднения (А6) и (А7) по времени, хотя на рисунке 1.27 наблюдается вариация значений амплитуды колебаний во времени вдоль основной кривой, вокруг ее средних значений.

Изменение характеристики нелинейной жесткости упругой опоры существенно влияет на описание резонансных кривых. Амплитудно-частотные характеристики ротора при переходном процессе и мягкой характеристике нелинейной упругости опоры ($K_3 < 0$) приведены для разбега машины на Рис. 1.28.

Сравнение рисунка 1.28b с рисунком 1.28a показывает, что при увеличении величины ν от 0.00025 до 0.0005 при мягкой нелинейной характеристике упругости ($K_3 < 0$) опоры максимальная амплитуда смещается в сторону высоких скоростей вращения с уменьшением амплитуды.

Анализ графиков на рисунках 1.26 и 1.28 показывает, что при жесткой нелинейной характеристике упругости ($K_3 > 0$) опоры максимальная амплитуда больше, чем аналогичная величина при мягкой нелинейной упругой характеристике ($K_3 < 0$) материала опоры [34, 35].

Чтобы удостовериться достоверности процесса перехода через резонанс, из уравнения (1.29), полагая равными нулю выражение $e\Omega^2$, обусловленное моментом силы инерции дисбаланса массы, и коэффициенты демпфирования μ_1 и μ_3, получим уравнение опорной линии резонансной кривой

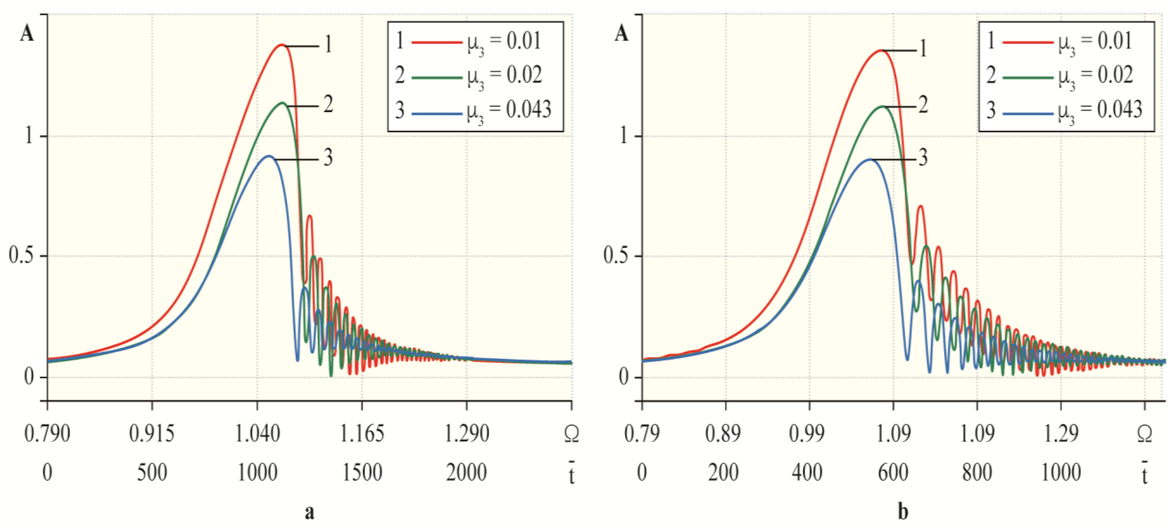


Рисунок 1.26 - АЧХ ротора при переходном процессе и $K_3 > 0$ с а - ν=0.00025, b - ν=0.0005 по результатам моделирования уравнений (А6) и (А7)

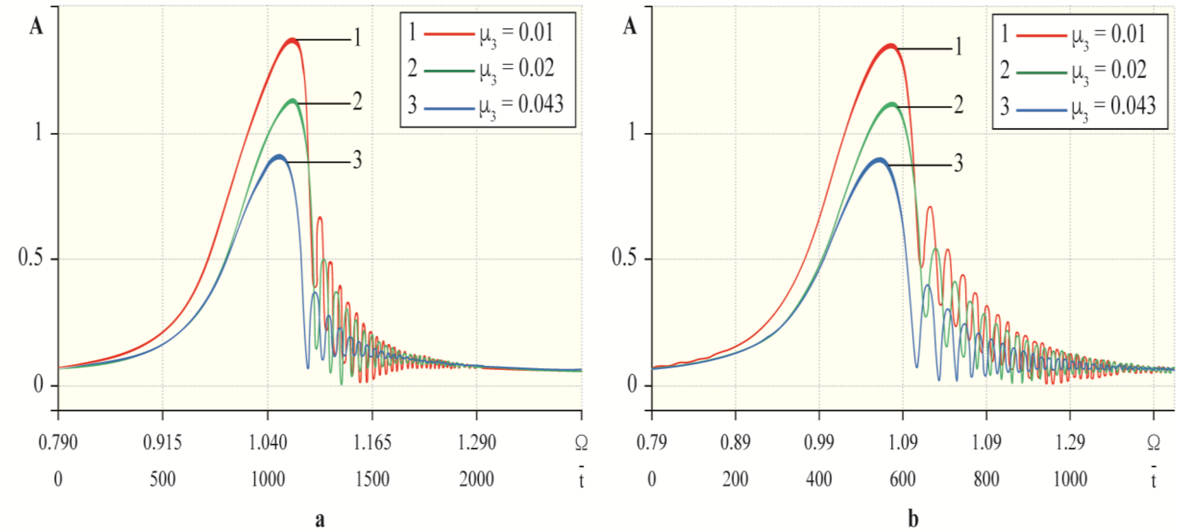


Рисунок 1.27 - АЧХ ротора при переходном процессе и $K_3 > 0$ с a - ν=0.00025, b - ν=0.0005 по результатам моделирования уравнений (A4) и (A5)

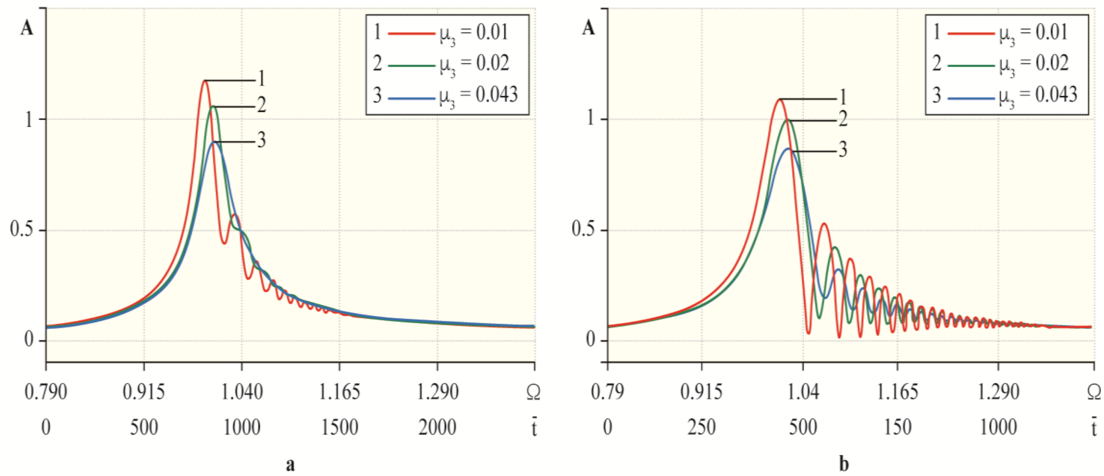


Рисунок 1.28 - АЧХ ротора при переходном процессе и $K_3 < 0$ с a - ν=0.00025, b - ν=0.0005 по результатам моделирования уравнений (A6) и (A7)

$$\Omega = \frac{\omega_n}{2-I_{P1}} + \sqrt{\left(\frac{\omega_n}{2-I_{P1}}\right)^2 + \frac{3K_3A^2}{4(2-I_{P1})}}. \tag{1.69}$$

При $I_{P1} \ll 2$ и $K_3 > 0$ $\Omega > \omega_n$, при $K_3 < 0$ $\Omega > \omega_n$.

При предположении, что $\nu \ll \Omega^2$, максимальные амплитуды и соответствующие им скорости вращения резонансных кривых приблизительно удовлетворяют уравнение (1.69). Соответствие между числовыми (графическими) значениями максимальной амплитуды A и резонансной скорости Ω при данных значениях коэффициента линейного демпфирования μ1 и углового ускорения ν и различных значениях коэффициента нелинейной жесткости K3 и коэффициента нелинейного кубического демпфирования μ3 (рисунки 1.26 и 1.28) по формуле (1.69) приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Соответствие между колебательными характеристиками: числовыми (графическими) значениями максимальной амплитудой А и резонансной скорости Ω по уравнению опорной кривой (1.69)

ωn≈1, IP1=0.021, μ1=0.01, ν=0.00025							
K3	μ3	A	Ω	K3	μ3	A	Ω
0.1	0.010	1.360	1.075	-0.1	0.010	1.163	0.960
	0.020	1.125	1.060		0.020	1.050	0.967
	0.043	0.910	1.041		0.043	0.900	0.980

Чтобы подтвердить аналитическое исследование, уравнения (1.15) были решены непосредственно численно. На рисунке 1.29 представлены численные результаты, полученные для прохождения через резонансную область при жесткой нелинейной характеристике упругости опоры материла опоры и “медленно” изменяющемся значении угловой скорости вращения Ω. На этом рисунке можно увидеть, что колебания в области максимума амплитуды носят характер биения, а за ней – затухающих биений, а также хорошо заметен демпфирующий эффект величины μ3 на протяжении всего диапазона скорости вращения. Эти результаты согласуются с предыдущими аналитическими результатами, показанными на рисунке 1.26 а и 1.28 а. Разницы заключаются в ширине области отчетливо видимых колебаний, величине максимума амплитуды и смещении момента времени прохождения максимума амплитуды. Тем не менее основное поведение колебательного процесса остается одинаковым. Прыжковые эффекты не обнаруживаются.

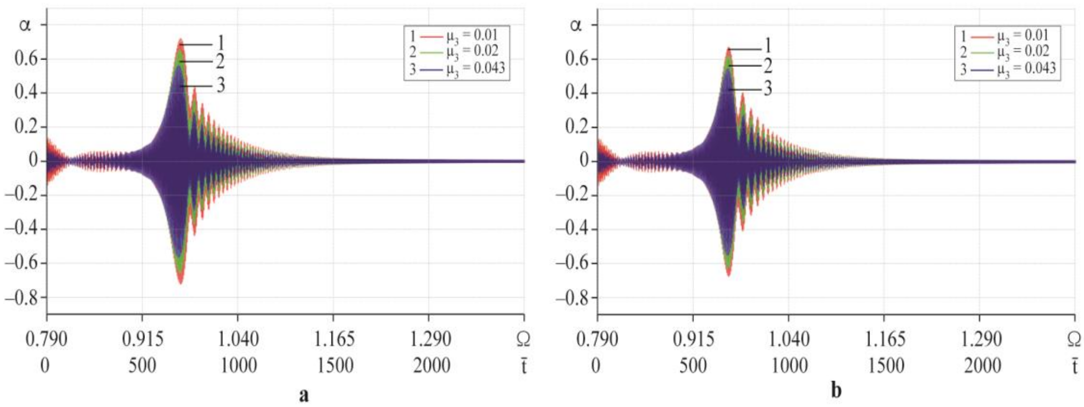


Рисунок 1.29 - Вариация угла α при переходном процессе с ν=0.00025 по результатам численного решения уравнений (А1) при а - $K_3 > 0$, b - $K_3 < 0$

1.5 Методология измерения коэффициентов демпфирования

Выражения (1.37) и (1.38), используя обозначений по (1.9) и (1.13), можно переписать в размерной форме. Тогда формулы для определения значений коэффициентов линейного демпфирования и нелинейного кубического демпфирования материала опоры, при которых исчезают прыжковые эффекты, будут иметь вид

$$\mu_{d1}^{*} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3\left(\frac{e}{L}\right)^{2} mL^{2} l_0^4 k_3 \omega} \text{ при } \mu_{d3} \approx 0 \tag{1.70}$$

и

$$\mu_{d3}^{*} = \frac{k_3 l_0^4}{\sqrt{3}\omega^3} \text{ при } \mu_{d1} \approx 0. \tag{1.71}$$

В случае комбинированного линейного и нелинейного кубического демпфирования материала опоры значение μ_{d3}^{*}, соответствующее найденным значениям μ_{d1} и k_3, определяется из формулы (29) в размерной форме:

$$\left[\left(\mu_{d1}\omega + \frac{3}{4}\mu_{d3}\omega^3 A_0^2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}k_3 A_0^2 - 2\Xi^{*}\omega\right)^2\right] A_0^2 = (emL^2\omega^2/L)^2, \tag{1.72}$$

где

$$\Xi^{*} = (mL^2 + I_T)\left[\left(1 - \frac{0.5 I_P}{mL^2 + I_T}\right)\omega - \sqrt{\frac{k_1 l_0^2 - mgl}{mL^2 + I_T}}\right], \tag{1.73}$$

$$A_0^2 = \frac{24\mu_{d1}\mu_{d3}\omega^4}{9 l_0^8 k_3^2 - 27\mu_{d3}^2\omega^3} + \sqrt{\left(\frac{24\mu_{d1}\mu_{d3}\omega^4}{9 l_0^8 k_3^2 - 27\mu_{d3}^2\omega^3}\right)^2 + \frac{16\mu_{d1}^2\omega^2}{9 l_0^8 k_3^2 - 27\mu_{d3}^2\omega^3}}. \tag{1.74}$$

Формула (1.74) выполнима только для значения μ_{d3}^{*} при $\mu_{d1} \neq 0$. Следует отметить, что выражения (1.70), (1.71) и (1.72) используются только при малых колебаниях вала ротора.

В формулах (1.70), (1.71) и (1.72) значение коэффициента нелинейной жесткости k_3 определяется из уравнения опорной кривой, экспериментально построенных частотных характеристик с одинаковым значением k_3 образцов материла опоры предложенной конструкции гироскопического ротора:

$$k_3 = \frac{8(mL^2 + I_T)}{3 l_0^4 A_0^2}\left[\omega\left(1 - \frac{0.5 I_P}{mL^2 + I_T}\right) - \sqrt{\frac{k_1 l_0^2 - mgl}{mL^2 + I_T}}\right]\omega. \tag{1.75}$$

Позвоночная кривая является общей для кривых частотных характеристик с одним и тем же значением величины k_3, в т.ч. для кривой, которая удовлетворяет условию (1.34).

Сначала изложим методологию определения значения μ_{d3}^{*} коэффициента нелинейного кубического демпфирования при сравнительно малом значении μ_{d1} - коэффициента линейного демпфирования материала опоры. Построим резонансные кривые с одинаковым значением k_3 и несколькими различными, но значениями μ_{d3}, близкими к значению μ_{d3}^{*}, вычисленному формулой (1.71) при предположении, что $\omega \approx \sqrt{\frac{k_1 l_0^2 - mgl}{mL^2 + I_T}}$, по уравнению частотной характеристики (1.72). Анализируя корней уравнения (1.72) для всех значений скорости вращения всего диапазона, из построенных кривых частотной характеристики выберем ту первую кривую, начиная сверху, имеющую только одну ветвь, соответствующим одним положительным корнем уравнения (1.72) и уточненным значением μ_{d3}^{*}.

Далее построим экспериментальные резонансные кривые при увеличивающемся, а затем уменьшающемся параметре ω, с тем же значением k_3 и несколькими значениями μ_{d3}, близкими к значению μ_{d3}^{*}, измеренными лазерным доплеровским виброметром [25, с. 380-392; 26, с. 3586-3592], Обычно экспериментальные кривые частотной характеристики прямого и обратного хода в области прыжковых эффектов не совпадают. Выберем из них те резонансные кривые, которые совпадают при регулируемом разгоне и выбеге роторной машины, со значением μ_{d3}^{*}. Наконец, сопоставив аналитически построенную резонансную кривую с уточненным значением μ_{d3}^{*} с выбранной аналогичной экспериментально кривой, идентифицируем коэффициент нелинейного кубического демпфирования со значением μ_{d3}^{*}.

Значение коэффициента линейного вязкого демпфирования μ_{d1}^{*} образца с нелинейным коэффициентом жесткости k_3 и без нелинейных демпфирующих свойств материала опоры, найденное по формуле (1.70) будет идентифицировано по вышеизложенной методологии. Теперь приближенное значение μ_{d3}^{*} - коэффициента нелинейного кубического демпфирования материала опоры, одновременно обладающего линейным демпфированием ($\mu_{d1} \neq 0$), определим по формуле (1.72) с учетом (1.74) и найденным значением k_3 из экспериментальных резонансных кривых с одинаковым значением $\mu_{d1} > \mu_{d1}^{*}$ и различными значениями μ_{d3}, с использованием формулы (1.75). Построив кривые частотных характеристик по формуле (1.72) для значений μ_{d3}, близких к значению μ_{d3}^{*}, и изучив корней (1.75), конкретизируем значение μ_{d3}^{*}, и соответствующую резонансную кривую. Далее сравнивается резонансная кривая с уточненным значением μ_{d3}^{*} с соответствующей экспериментальной частотной характеристикой и значение μ_{d3}^{*} идентифицируется.

Таким образом, выше излагали методологию определения и идентификации параметров k_3, μ_{d1}^{*}, μ_{d3}^{*} и μ_{d3}^{*} при $\mu_{d1}^{*} \neq 0$, а сама процедура осуществления идентификации этих параметров материала опоры и оценка полученных их значений в сравнении с результатами, полученными экспериментальными и другими методами требуют отдельное исследование.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА С АНИЗОТРОПИЕЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОЙ ОПОРЫ

2.1 Уравнения движения

Как известно феноменологическое нелинейное кубическое (n-ое) демпфирование добавлено в исследованиях к уравнениям движения с линейным, и (или) квадратичным и (или) кубическим членами жесткости. Были рассмотрены два кубических (n-их) демпфирующих члена: первый дается скоростью, умноженной на квадрат смещения (n–1 -ой степени смещения), а второй член пропорционален кубу скорости (пропорционален n-й степени скорости). В ссылках [36-42] линейная, квадратичная и кубическая диссипации были получены с использованием вязкоупругой механической модели Кельвина – Фойгта.

Очень привлекательными являются исследования проводимые в [43-48]. Эксперименты показывали сильное увеличение демпфирования с увеличением амплитуды колебаний при нелинейных колебаниях балок, пластин и оболочек большого размера при больших амплитудах, соизмеримых с размерами, даже несколько раз больше размеров образца. Чтобы пояснить это в [44, с. 1789; 45, с. 1794] в отличие от [40, с. 7-18; 41, с. 757-760; 42, с. 116-120], моделирование нелинейного демпфирования производилось в другом математическом формате: оно выводиться из вязкоупругости с помощью модели с одной степенью свободы, полученной из стандартного линейного твердого материала, в который добавлена геометрическая нелинейность в соответствии с гипотезой об отсутствии внутренних резонансов или активации дополнительных мод, которые могут захватывать механическую энергию. Разработанная модель демпфирования является нелинейной (представляется произведением скорости на квадрат смещения), а ее параметры определены экспериментально. Результаты исследования вынужденных вибрационных откликов, измеренных для прямоугольной пластины со свободным краем интересны тем, что в этом случае отсутствует выход энергии через границу, что подтверждает увеличение демпфирования с амплитудой колебаний.

Известно, что резиновые амортизаторы имеют и нелинейное демпфирование, и нелинейную жесткость [3, с. 35-62]. Для достижения более высокой производительности виброизоляции следует принимать во внимание наличие нелинейностей в конструкции. Следовательно, упругая опора верхнего подшипника гироскопического ротора может быть изготовлена из материалов, таких как из каучука, резины и других полимеров, обладающих не только линейным демпфированием, но и нелинейным демпфированием, широко используемых в качестве демпфера возникающих колебаний. Учитывая это и анизотропию жесткости и демпфирования в ортогональных направлениях, зададим диссипативную энергию в упругой опоре в виде функции Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\mu_{d11}\dot{\alpha}^2 + \mu_{d12}\dot{\beta}^2\right) + \frac{1}{4}\left(\mu_{d31}\dot{\alpha}^4 + \mu_{d32}\dot{\beta}^4\right), \tag{2.5}$$

где μ_{d11}, μ_{d12}– –коэффициенты линейного вязкого демпфирования и μ_{d31}, μ_{d32} – коэффициенты нелинейного кубического вязкого демпфирования во взаимно перпендикулярных направлениях. Если учесть, что вал ротора является жестким, и анизотропной упругостью обладает только его верхняя опора, а силы упругости во взаимно перпендикулярных направлениях координат, соответственно равны $F_x = c_{11}x_0 + c_{31}x_0^3 = c_{11}l_0\alpha + c_{31}l_0^3\alpha^3, F_y = c_{12}y_0 + c_{32}y_0^3 = c_{12}l_0\beta + c_{32}l_0^3\beta^3$, тогда потенциальную энергию системы можно представить в виде

$$V = \frac{1}{2}l_0^2(c_{11}\alpha^2 + c_{12}\beta^2) + \frac{1}{4}l_0^4(c_{31}\alpha^4 + c_{32}\beta^4), \qquad (2.6)$$

где c_{11}, c_{12} - коэффициенты линейной жесткости и c_{31}, c_{32} – коэффициенты нелинейной жесткости опоры во взаимно перпендикулярных направлениях.

Уравнения Лагранжа второго рода для роторной системы представим в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i, i = 1,2. \qquad (2.7)$$

Здесь $q_i, (i = 1,2)$ – обобщенные координаты, ими являются α, β, соответственно; $Q_i, (i = 1,2)$ – обобщенные силы, они представляются с помощью M_K, M_N и определяются по формулам (1.4).

Подставив выражение (1.2) с учетом (1.3) и выражения (1.4), (2.5 и 2.6) в (2.7), получим уравнения для движения ротора

$$\begin{gathered}(J_T + mL^2)\ddot{\alpha} + J_P\omega\dot{\beta} + \mu_{d11}\dot{\alpha} + \mu_{d31}\dot{\alpha}^3 + (c_{11}l_0^2 - mgL)\alpha + \\ +c_{31}l_0^4\alpha^3 = me\omega^2 L\cos\omega t, \\ (J_T + mL^2)\ddot{\beta} - J_P\omega\dot{\alpha} + \mu_{d12}\dot{\beta} + \mu_{d32}\dot{\beta}^3 + (c_{12}l_0^2 - mgL)\beta + \\ +c_{32}l_0^4\beta^3 = me\omega^2 L\sin\omega t.\end{gathered} \qquad (2.8)$$

Собственные частоты (критические скорости) бездемпфирной роторной системы (2.8):

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\tilde{b}}{2} \mp \sqrt{\frac{\tilde{b}^2}{4} - \tilde{c}}}, \qquad (2.9)$$

где

$$\tilde{b} = \frac{(J_T+mL^2)\left[(c_{11}l_0^2-mgL)+(c_{12}l_0^2-mgL)\right]}{(J_T+mL^2)^2-J_P^2}, \tilde{c} = \frac{(c_{11}l_0^2-mgL)(c_{12}l_0^2-mgL)}{(J_T+mL^2)^2-J_P^2}, \qquad (2.10)$$

в случае $J_T >> J_P$: $\tilde{b} = \frac{(c_{11}l_0^2-mgL)}{(J_T+mL^2)+}\frac{(c_{12}l_0^2-mgL)}{(J_T+mL^2)}, \tilde{c} = \left[\frac{(c_{11}l_0^2-mgL)}{(J_T+mL^2)}\right]\left[\frac{(c_{12}l_0^2-mgL)}{(J_T+mL^2)}\right].$

Для численных расчетов по формулам (2.9) и (2.10) некоторые геометрические и динамические параметры гироскопической роторной системы заимствованы из экспериментальной установки, использованной в работах [10, с.

532-540; 37, с. 9-26]: L = 0.46 m, l0 = 0.33 m, m = 2 kg, c11 = 2 104 N/m, c12 = 2.4 104 N/m, JT = 0.090 kgm2, JP = 0.011 kgm2.

Теперь можно вычислить собственные частоты (критические скорости) гироскопической роторной системы (2.8): ω1 = 64.94 s-1, ω2 = 71.34 s-1.

Собственную угловую скорость вращения вала ω1 в интервале [64.95 s-1, 64.48 s-1] можно приблизительно считать постоянной и равной ω1 = 65 s-1. Это позволяет использовать ω1 в процессе приведения параметров $t, \omega, G, c_{11}, c_{12}, c_{31}, c_{32}, \mu_{d11}, \mu_{d12}, \mu_{d31}, \mu_{d32}$ в безразмерный вид.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$l = \frac{l_0}{L}; \bar{t} = t\omega_1; \Omega = \frac{\omega}{\omega_1;} \bar{J}_p = \frac{J_p}{(mL^2)}; \bar{J}_T = \frac{J_T}{(mL^2}); \bar{G} = \frac{g}{(L\omega_1^2});$$

$$C_{11} = \frac{c_{11}}{(m\omega_1^2)}; C_{12} = \frac{c_{12}}{(m\omega_1^2)}; e_r = e/[L(1+\bar{J}_T)]; C_{31} = \frac{c_{31}l_0^4}{[mL^2\omega_1^2(1+\bar{J}_T)]};$$

$$C_{32} = \frac{c_{32}l_0^4}{[mL^2\omega_1^2(1+\bar{J}_T)]}; \mu_{11} = \frac{\mu_{d11}}{[mL^2\omega_1(1+\bar{J}_T)]}; \mu_{12} = \frac{\mu_{d12}}{[mL^2\omega_1(1+\bar{J}_T)]};$$

$$\mu_{31} = \frac{\mu_{d31}\omega_1}{[mL^2(1+\bar{J}_T)];} \mu_{32} = \frac{\mu_{d32}\omega_1}{[mL^2(1+\bar{J}_T)];} J_{p1} = \frac{\bar{J}_p}{(1+\bar{J}_T).} \quad (2.11)$$

С использованием (2.11), уравнения движения (2.8), можно представить в безразмерном виде:

$$\alpha'' + J_{p1}\Omega\beta' + \mu_{11}\alpha' + \mu_{31}\alpha'^3 + \omega_{n1}^2\alpha + C_{31}\alpha^3 = e_r\Omega^2 \cos\Omega\,\bar{t},$$
$$\beta'' - J_{p1}\Omega\alpha' + \mu_{12}\beta' + \mu_{32}\beta'^3 + \omega_{n2}^2\beta + C_{32}\beta^3 = e_r\Omega^2 \sin\Omega\,\bar{t}, \quad (2.12)$$

где

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{(C_{11}l^2 - \bar{G})}{(1+\bar{J}_T)}} \quad (2.13)$$

- безразмерная собственная частота роторной системы (12) при $C_1 = C_{11}$,

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{(C_{12}l^2 - \bar{G})}{(1+\bar{J}_T)}} \quad (2.14)$$

- безразмерная собственная частота роторной системы (12) при $C_1 = C_{12}$, где принято $\bar{J}_T \gg \bar{J}_P$.

2.2 Решение уравнений движения и частотные характеристики нелинейной роторной системы с анизотропными упругими и демпфирующими характеристиками

Величины α и β являются обобщенными координатами и при малых их значениях в решениях системы (2.12) преобладают гармонические колебания на частоте вынуждающего момента центробежной силы инерции. Тогда зададимся решением системы (12) в следующем виде:

$$\alpha = A\,cos(\Omega\bar{t} + \gamma)\,,$$
$$\beta = B\,sin(\Omega\bar{t} + \delta), \tag{2.15}$$

где A, B – амплитуды колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях, γ, δ – углы сдвига фаз между колебаниями угловых координат и проекциями вынуждающего момента центробежной силы инерции.

При этом геометрический центр диска описывает эллипс со следующим уравнением

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} - 2\frac{\alpha\beta}{AB} sin(\delta - \gamma) = cos^2(\delta - \gamma).$$

Подставляя выражения (2.15) в систему (2.12), используя некоторые тригонометрические тождества и приравнивая только коэффициенты при функциях $cos\,\Omega\,\bar{t}$ и $sin\,\Omega\,\bar{t}$, получим систему четырех уравнений относительно четырех переменных A, B, γ, δ:

$$\begin{gathered}
\left[(\omega_{n1}^2 - \Omega^2)A + \frac{3}{4}C_{31}A^3\right] cos\,\gamma - \left(\mu_{11}\Omega A + \frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3 A^3\right) sin\,\gamma + J_{p1}\Omega^2 B\,cos\,\delta \\
= e_r\Omega^2, \\
\left(\mu_{11}\Omega A + \frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3 A^3\right) cos\,\gamma + \left[(\omega_{n1}^2 - \Omega^2)A + \frac{3}{4}C_{31}A^3\right] sin\,\gamma + J_{p1}\Omega^2 B\,sin\,\delta = 0, \\
J_{p1}\Omega^2 A\,cos\,\gamma + \left[(\omega_{n2}^2 - \Omega^2)B + \frac{3}{4}C_{32}B^3\right] cos\,\delta - \left(\mu_{12}\Omega B + \frac{3}{4}\mu_{32}\Omega^3 B^3\right) sin\,\delta \\
= e_r\Omega^2, \\
J_{p1}\Omega^2 A\,sin\,\gamma + \left(\mu_{12}\Omega B + \tfrac{3}{4}\mu_{32}\Omega^3 B^3\right) cos\,\delta + \left[(\omega_{n2}^2 - \Omega^2)B + \tfrac{3}{4}C_{32}B^3\right] sin\,\delta = 0.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
C_A = (\omega_{n1}^2 - \Omega^2)A + \frac{3}{4}C_{31}A^3, \mu_A = \mu_{11}\Omega A + \frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3 A^3, J_{PA} = J_{p1}\Omega^2 A, \\
C_B = (\omega_{n2}^2 - \Omega^2)B + \frac{3}{4}C_{32}B^3, \mu_B = \mu_{12}\Omega B + \frac{3}{4}\mu_{32}\Omega^3 B^3, J_{PB} = J_{p1}\Omega^2 B, \\
e_\Omega = e_r\Omega^2.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

С учетом (2.17), представим выражения для амплитудно-частотных характеристик:

$$e_\Omega^2 \begin{Bmatrix} \{C_A(C_B^2 + \mu_B^2) + J_{PB}[J_{PA}(J_{PB} - C_B) + \mu_A\mu_B - C_A C_B]\}^2 + \\ \{\mu_A(C_B^2 + \mu_B^2) + J_{PB}[J_{PA}\mu_B - (\mu_B C_A + \mu_A C_B)]\}^2 \end{Bmatrix} =$$
$$\{(C_A^2 + \mu_A^2)(C_B^2 + \mu_B^2) + J_{PA}J_{PB}[2(\mu_A\mu_B - C_A C_B) + J_{PA}J_{PB}]\}^2,$$

$$e_\Omega^2\begin{Bmatrix}\{C_B(C_A^2+\mu_A^2)+J_{PA}[J_{PB}(J_{PA}-C_A)+\mu_A\mu_B-C_AC_B]\}^2+\\ \{\mu_B(C_A^2+\mu_A^2)+J_{PA}[J_{PB}\mu_A-(\mu_AC_B+\mu_BC_A)]\}^2\end{Bmatrix}=$$
$$\{(C_A^2+\mu_A^2)(C_B^2+\mu_B^2)+J_{PA}J_{PB}[2(\mu_A\mu_B-C_AC_B)+J_{PA}J_{PB}]\}^2, \qquad (2.18)$$

и выражения для фазово-частотных характеристик:

$$tan\,\gamma=-\frac{\mu_A(C_B^2+\mu_B^2)+J_{PB}[J_{PA}\mu_B-(\mu_BC_A+\mu_AC_B)]}{C_A(C_B^2+\mu_B^2)+J_{PB}[J_{PA}(J_{PB}-C_B)+\mu_A\mu_B-C_AC_B]},$$
$$tan\,\delta=-\frac{J_{PA}[J_{PB}\mu_A-(\mu_AC_B+\mu_BC_A)]+\mu_B(C_A^2+\mu_A^2)}{J_{PA}[J_{PA}J_{PB}+\mu_A\mu_B-C_A(C_B+J_{PB})]+C_B(C_A^2+\mu_A^2)}. \qquad (2.19)$$

Из системы (2.12) проекции момента сил передеваемости

$$M_{\tau\alpha}=\mu_{11}\alpha'+\mu_{31}\alpha'^3+\omega_{n1}^2\alpha+C_{31}\alpha^3,$$
$$M_{\tau\beta}=\mu_{12}\beta'+\mu_{32}\beta'^3+\omega_{n2}^2\beta+C_{32}\beta^3. \qquad (2.20)$$

С другой стороны, проекции момента сил передеваемости (2.20) примем в виде следующих гармоник

$$M_{\tau\alpha}=A_\tau\,cos(\Omega\bar{t}+\gamma),$$
$$M_{\tau\beta}=B_\tau\,sin(\Omega\bar{t}+\delta), \qquad (2.21)$$

где A_τ, B_τ - амплитуды проекций момента сил передеваемости системы.

Подставив (2.15) и (2.21) в (2.20), получим выражения для определения амплитуд проекций момента сил передеваемости

$$A_\tau^2=\left(\mu_{11}\Omega A+\frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3A^3\right)^2+\left(\omega_{n1}^2A+\frac{3}{4}C_{31}A^3\right)^2,$$
$$B_\tau^2=\left(\mu_{11}\Omega B+\frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3B^3\right)^2+\left(\omega_{n2}^2B+\frac{3}{4}C_{31}B^3\right)^2.$$

Передаваемости момента сил системы определяются как отношения амплитуд проекций момента сил передеваемости к амплитуде возмущающего момента:

$$\sigma_\alpha=\frac{A_\tau}{(e_r\Omega^2)}=\sqrt{\frac{\left[\left(\mu_{11}\Omega A+\frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3A^3\right)^2+\left(\omega_{n1}^2A+\frac{3}{4}C_{31}A^3\right)^2\right]}{(e_r\Omega^2)^2}},$$
$$\sigma_\beta=\frac{B_\tau}{(e_r\Omega^2)}=\sqrt{\frac{\left[\left(\mu_{11}\Omega B+\frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3B^3\right)^2+\left(\omega_{n2}^2B+\frac{3}{4}C_{31}B^3\right)^2\right]}{(e_r\Omega^2)^2}}. \qquad (2.22)$$

Введем функции

$$F_1 = \frac{\left[\left(\mu_{11}\Omega A + \frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^3 A^3\right)^2 + \left(\omega_{n1}^2 A + \frac{3}{4}C_{31}A^3\right)^2\right]}{(e_r\Omega^2)^2},$$

$$F_2 = \frac{\left[\left(\mu_{12}\Omega B + \frac{3}{4}\mu_{32}\Omega^3 B^3\right)^2 + \left(\omega_{n2}^2 B + \frac{3}{4}C_{32}B^3\right)^2\right]}{(e_r\Omega^2)^2}. \quad (2.23)$$

Вычислим производные от F_1 и F_2 по Ω и их приравняем к нулю

$$\frac{dF_1}{d\Omega} = 0, \frac{dF_2}{d\Omega} = 0. \quad (2.24)$$

Решением уравнений (2.24) являются некоторые величины Ω_1 и Ω_2. В этих точках вторые производные от F_1 и F_2 отрицательны, т.е. функции F_1 и F_2 имеют максимальные значения, при этом

$$\sigma\sqrt{F_1(\Omega_1)}_{\alpha max} \text{ и } \sigma\sqrt{F_2(\Omega_2)}_{\beta max} \quad (2.25)$$

При скорости вращения $\Omega = 0$ и $C_{31} = 0$, $C_{32} = 0$ передаваемости проекций момента сил системы

$$\sigma_\alpha = \frac{\omega_{n1}^2 A}{e_r\bar{G}} \text{ и } \sigma_\beta = \frac{\omega_{n2}^2 B}{e_r\bar{G}} \quad (2.26)$$

и при $\Omega = 0$ и $C_{31} \neq 0$, $C_{32} \neq 0$

$$\sigma_\alpha = \frac{\omega_{n1}^2 A + \frac{3}{4}C_{31}A^3}{e_r\bar{G}} \text{ и } \sigma_\beta = \frac{\omega_{n2}^2 B + \frac{3}{4}C_{32}B^3}{e_r\bar{G}}. \quad (2.27)$$

2.3 Частотные характеристики роторной системы без демпфирования

При отсутствии демпфирования фазовые углы γ и δ равны фазовым углам проекций внешнего гармонического момента на вынуждающей частоте Ω, и равны нулю. Тогда

$$\alpha'' + J_{p1}\Omega\beta' + \omega_{n1}^2\alpha + C_{31}\alpha^3 = e_r\Omega^2 \cos\Omega\,\bar{t},$$
$$\beta'' - J_{p1}\Omega\alpha' + \omega_{n2}^2\beta + C_{32}\beta^3 = e_r\Omega^2 \sin\Omega\,\bar{t} \quad (2.28)$$

Зададимся решением уравнений (2.28) в виде

$$\alpha = A\cos\Omega\,\bar{t},$$
$$\beta = B\sin\Omega\,\bar{t}. \quad (2.29)$$

Подставляя решение (2.29) в уравнения (2.28) и приравнивая в обеих частях соответствующих равенств коэффициенты при функциях $cos\,\Omega\,\bar{t}$ и $sin\,\Omega\,\bar{t}$, получаем следующую систему двух уравнений относительно A и B:

$$(\omega_{n1}^2-\Omega^2)A+\frac{3}{4}C_{31}A^3+J_{P1}\Omega^2 B=0,$$
$$(\omega_{n1}^2-\Omega^2)B+\frac{3}{4}C_{31}B^3+J_{P1}\Omega^2 A=0. \quad (2.30)$$

При $C_{31}=0$ и $C_{32}=0$ из системы уравнений (2.30) найдем

$$A=\frac{e_r\Omega^2[\omega_{n2}^2-(1+J_{P1})\Omega^2]}{(\omega_{n1}^2-\Omega^2)(\omega_{n2}^2-\Omega^2)-(J_{P1}\Omega^2)^2},$$
$$B=\frac{e_r\Omega^2[\omega_{n1}^2-(1+J_{P1})\Omega^2]}{(\omega_{n1}^2-\Omega^2)(\omega_{n2}^2-\Omega^2)-(J_{P1}\Omega^2)^2}. \quad (2.31)$$

2.4 Нестационарные резонансные колебания роторной системы

Для исследования нестационарных процессов в роторной системе, близкой к линейной, используем для решения уравнений движения (2.12) один из асимптотических методов, например, метод медленно меняющихся амплитуд (VAM) [36, с. 8-27]. Для возможности применения метода медленно меняющихся амплитуд принимаются следующие ограничения. Проекции моментов демпфирующих сил $\mu_{11}\alpha^{'},\mu_{12}\beta^{'}$ и $\mu_{31}\alpha^{'3},\mu_{32}\beta^{'3}$, а также момента кубической составляющей восстанавливающей силы $C_{31}\alpha^3, C_{32}\beta^3$, проекции момента силы инерции неуравновешенности массы $e_r\Omega^2\,cos\,\Omega\,\bar{t}, e_r\Omega^2\,sin\,\Omega\,\bar{t}$ считаются малыми по сравнению с моментами других сил, действующих в системе. При предположении, что $\bar{J}_P\ll\bar{J}_T$ можно считать малыми и проекции момента пассивной гироскопической силы $J_{p1}\Omega\beta^{'}$ и $-J_{p1}\Omega\alpha^{'}$. Ограничимся также рассмотрением движения в области резонанса, где частоты свободных колебаний ω_{n1} и ω_{n2} близки к частоте вынужденных колебаний Ω, т. е. $\xi_1=\varepsilon\xi_1^*=\Omega-\omega_{n1}\ll\omega_{n1}, \xi_2=\varepsilon\xi_2^*=\Omega-\omega_{n2}\ll\omega_{n2}$. Здесь малый параметр $\varepsilon\ll 1$.

Уравнения (2.12), при малых значениях величин ξ_1,ξ_2 и принятыми ограничениями задачи примут следующий вид:

$$\alpha^{''}+\Omega^2\alpha=e_r\Omega^2\,cos\,\Omega\,\bar{t}-J_{p1}\Omega\beta^{'}-\mu_{11}\alpha^{'}-\mu_{31}\alpha^{'3}-C_{31}\alpha^3+2\xi_1\alpha,$$
$$\beta^{''}+\Omega^2\beta=e_r\Omega^2\,sin\,\Omega\,\bar{t}+J_{p1}\Omega\alpha^{'}-\mu_{12}\beta^{'}-\mu_{32}\beta^{'3}-C_{32}\beta^3+2\xi_2\beta. \quad (2.32)$$

Уравнения (2.32) являются системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно α,β.

Так как мы хотим исследовать вынужденные основные резонансные колебания, будем искать решения (2.15) на частоте вынуждающего момента:

$$\alpha=A(\bar{t})\,cos[\Omega\bar{t}+\gamma(\bar{t})],$$
$$\beta=B(\bar{t})\,sin[\Omega\bar{t}+\delta(\bar{t})], \quad (2.33)$$

где $A(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ – медленно изменяющиеся амплитуды, $\gamma(\bar{t})$ и $\delta(\bar{t})$ – углы сдвига фаз ортогональных колебаний относительно проекции вынуждающего гармонического момента.

Введем новые переменные $\frac{d\alpha}{d\bar{t}}$ и $\frac{d\beta}{d\bar{t}}$:

$$\frac{d\alpha}{d\bar{t}} = -A\Omega\, sin(\Omega\bar{t} + \gamma) \text{ и } \frac{d\beta}{d\bar{t}} = B\Omega\, cos(\Omega\bar{t} + \delta). \qquad (2.34)$$

Выражения (2.34) не есть результаты дифференцирования α и β по времени $\bar{t}$, ибо истинные производные от (2.33) по времени, имеют вид

$$\frac{d\alpha}{d\bar{t}} = \frac{dA}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \gamma) - A\left(\Omega + \frac{d\gamma}{d\bar{t}}\right) sin(\Omega\bar{t} + \gamma)\,,$$
$$\frac{d\beta}{d\bar{t}} = \frac{dB}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \gamma) + B\left(\Omega + \frac{d\delta}{d\bar{t}}\right) cos(\Omega\bar{t} + \delta). \qquad (2.35)$$

Следовательно, для согласования с выражениями (34) необходимо полагать, что

$$\frac{dA}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \gamma) - A\frac{d\gamma}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \gamma) = 0,$$
$$\frac{dB}{d\bar{t}} sin(\Omega\bar{t} + \gamma) + B\frac{d\delta}{d\bar{t}} cos(\Omega\bar{t} + \delta) = 0. \qquad (2.36)$$

Эти соотношения можно рассматривать как дополнительные условия, накладываемые на A, B, γ и δ. Взяв производные от (2.34) по времени, подставив их, (2.33) и (2.34) в (2.32) и с использованием (2.36), получим систему укороченных уравнений:

$$A' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \begin{bmatrix} e_r\Omega^2 \cos\Omega\,\bar{t} - J_{p1}\Omega^2 B\, cos(\Omega\bar{t} + \delta) + \mu_{11}\Omega A\, sin(\Omega\bar{t} + \gamma) + \\ \mu_{31}\Omega^3 A^3\, sin^3(\Omega\bar{t} + \gamma) - C_{31}A^3\, cos^3(\Omega\bar{t} + \gamma) + 2\xi_1\Omega A\, cos(\Omega\bar{t} + \gamma) \end{bmatrix} sin(\Omega\bar{t} + \gamma)\, d\bar{t},$$

$$A\gamma' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \begin{bmatrix} e_r\Omega^2 \cos\Omega\,\bar{t} - J_{p1}\Omega^2 B\, cos(\Omega\bar{t} + \delta) + \mu_{11}\Omega A\, sin(\Omega\bar{t} + \gamma) + \\ \mu_{31}\Omega^3 A^3\, sin^3(\Omega\bar{t} + \gamma) - C_{31}A^3\, cos^3(\Omega\bar{t} + \gamma) + 2\xi_1\Omega A\, cos(\Omega\bar{t} + \gamma) \end{bmatrix} cos(\Omega\bar{t} + \gamma)\, d\bar{t},$$

$$B' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \begin{bmatrix} e_r\Omega^2 \sin\Omega\,\bar{t} - J_{\text{p}1}\Omega^2 A\, sin(\Omega\bar{t} + \gamma) - \mu_{12}\Omega B\, cos(\Omega\bar{t} + \delta) - \\ \mu_{32}\Omega^3 B^3\, cos^3(\Omega\bar{t} + \delta) - C_{32}B^3\, sin^3(\Omega\bar{t} + \delta) + 2\xi_2\Omega B\, cos(\Omega\bar{t} + \gamma) \end{bmatrix} cos(\Omega\bar{t} + \delta)\, d\bar{t},$$

$$B\delta' = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \begin{bmatrix} e_r\Omega^2 \sin\Omega\,\bar{t} - J_{p1}\Omega^2 A\sin(\Omega\bar{t}+\gamma) - \mu_{12}\Omega B\cos(\Omega\bar{t}+\delta) - \\ \mu_{32}\Omega^3 B^3\cos^3(\Omega\bar{t}+\delta) - C_{32}B^3\sin^3(\Omega\bar{t}+\delta) + 2\xi_2\Omega B\cos(\Omega\bar{t}+\gamma) \end{bmatrix} \sin(\Omega\bar{t}+\delta)\,d\bar{t}. \tag{2.37}$$

После выполнения интегрирования уравнений (2.37) придем к системе уравнений нестационарных колебаний ротора

$$\begin{gathered} A' = -\frac{1}{2}e_r\Omega\sin\gamma + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega B\sin(\gamma-\delta) - \frac{1}{2}\mu_{11}A - \frac{3}{8}\mu_{31}\Omega^2A^3, \\ A\gamma' = -\frac{1}{2}e_r\Omega\cos\gamma + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega B\cos(\gamma-\delta) + \frac{3}{8\Omega}C_{31}A^3 - \xi_1 A, \\ B' = -\frac{1}{2}e_r\Omega\sin\delta + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega A\sin(\delta-\gamma) - \frac{1}{2}\mu_{12}B - \frac{3}{8}\mu_{32}\Omega^2B^3, \\ B\delta' = -\frac{1}{2}e_r\Omega\cos\delta + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega A\cos(\delta-\gamma) + \frac{3}{8\Omega}C_{32}B^3 - \xi_2 B. \end{gathered} \tag{2.38}$$

Стационарные режимы движения определяются при условиях $A' = 0, \gamma' = 0, B' = 0$ и $\delta' = 0$ уравнениями

$$\begin{gathered} e_r\Omega\sin\gamma - J_{p1}\Omega B\sin(\gamma-\delta) + \mu_{11}A + \frac{3}{4}\mu_{31}\Omega^2A^3 = 0, \\ e_r\Omega\cos\gamma - J_{p1}\Omega B\cos(\gamma-\delta) - \frac{3}{4\Omega}C_{31}A^3 + 2\xi_1 A = 0, \\ e_r\Omega\sin\delta - J_{p1}\Omega A\sin(\delta-\gamma) + \mu_{12}B + \frac{3}{4}\mu_{32}\Omega^2B^3 = 0, \\ e_r\Omega\cos\delta - J_{p1}\Omega A\cos(\delta-\gamma) - \frac{3}{4\Omega}C_{32}B^3 + 2\xi_2 B = 0. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Для исследования влияния анизотропии жесткости и демпфирования материала упругой опоры на динамику переходного процесса, через резонансную область, следуя методу, использованному в работах [36, с. 12-29; 38, с. 86-91] получим дифференциальные уравнения движения ротора в компактном безразмерном виде

$$\begin{gathered} \alpha'' + \Omega^2(\tau)\alpha = e_r\Omega^2(\tau)\cos\Omega(\tau)\bar{t} - J_{p1}\Omega(\tau)\beta' - \mu_{11}\alpha' - \mu_{31}\alpha'^3 - C_{31}\alpha^3 + 2\xi_1\alpha, \\ \beta'' + \Omega^2(\tau)\beta = e_r\Omega^2(\tau)\sin\Omega(\tau)\bar{t} + J_{p1}\Omega(\tau)\alpha' - \mu_{12}\beta' - \mu_{32}\beta'^3 - C_{32}\beta^3 + 2\xi_2\beta, \end{gathered} \tag{2.40}$$

где $\Omega(\tau)$ – безразмерная скорость вращения вала, зависящая от $\tau = \varepsilon\bar{t}$ – “медленного” безразмерного времени. Здесь малый параметр $\varepsilon \ll 1$.

Демпфирующие силы с течением времени подавляют высшие гармоники [37, с. 12-28], и в системе развиваются одночастотные колебания основной гармоники с частотой близкой к частоте возмущающей силы.

Одночастотный метод позволяет рассмотреть нестационарный резонансный переход при весьма общих условиях – обусловливающих переменность коэффициентов дифференциальных уравнений, при наличии нелинейности упругой и демпфирующей характеристик гибких опор. В действительности закон вариации скорости вращения ротора может быть получен только на основе обработки результатов экспериментальных исследований прямого и обратного ходов машины. Однако для определения общего характера резонансного перехода одночастотный метод позволяет решить задачу при произвольном законе изменения угловой скорости ротора. При этом угловая скорость ротора должна меняться медленно по отношению к величинам собственных частот исследуемой системы.

Следовательно, будем искать решения (2.40) в виде:

$$\alpha = A(\bar{t})\,cos[\varphi + \gamma(\bar{t})]\,,$$
$$\beta = B(\bar{t})\,sin[\varphi + \delta(\bar{t})]. \tag{2.41}$$

Далее используя метод изменяющейся амплитуды и поступая как в предыдущем, получим уравнения переходного процесса в виде

$$A' = -\frac{1}{\Omega(\tau)}\begin{bmatrix} e_r\Omega^2(\tau)\,cos\,\varphi - J_{\text{p}1}\Omega^2(\tau)B\,cos(\varphi+\delta) + \mu_{11}\Omega(\tau)A\,sin(\varphi+\gamma) + \\ \mu_{31}\Omega^3(\tau)A^3\,sin^3(\varphi+\gamma) - C_{31}A^3\,cos^3(\varphi+\gamma) + 2\xi_1\Omega(\tau)A\,cos(\varphi+\gamma)\end{bmatrix} sin(\varphi+\gamma)\,,$$

$$A\gamma' = -\frac{1}{\Omega}(\tau)\begin{bmatrix} e_r\Omega(\tau)^2\,cos\,\varphi - J_{\text{p}1}\Omega^2(\tau)B\,cos(\varphi+\delta) + \mu_{11}\Omega(\tau)A\,sin(\varphi+\gamma) + \\ \mu_{31}\Omega^3(\tau)A^3\,sin^3(\varphi+\gamma) - C_{31}A^3\,cos^3(\varphi+\gamma) + 2\xi_1\Omega(\tau)A\,cos(\varphi+\gamma)\end{bmatrix} cos(\varphi+\gamma)\,,$$

$$B' = \frac{1}{\Omega(\tau)}\begin{bmatrix} e_r\Omega^2(\tau)\,sin\,\varphi - J_{\text{p}1}\Omega^2(\tau)A\,sin(\varphi+\gamma) - \mu_{12}\Omega(\tau)B\,cos(\varphi+\delta) - \\ \mu_{32}\Omega^3(\tau)B^3\,cos^3(\varphi+\delta) - C_{32}B^3\,sin^3(\varphi+\delta) + 2\xi_2\Omega(\tau)B\,cos(\varphi+\gamma)\end{bmatrix} cos(\varphi+\delta)\,,$$

$$B\delta' = -\frac{1}{\Omega(\tau)}\begin{bmatrix} e_r\Omega^2(\tau)\,sin\,\varphi - J_{\text{p}1}\Omega^2(\tau)A\,sin(\varphi+\gamma) - \mu_{12}\Omega(\tau)B\,cos(\varphi+\delta) - \\ \mu_{32}\Omega^3(\tau)B^3\,cos^3(\varphi+\delta) - C_{32}B^3\,sin^3(\varphi+\delta) + 2\xi_2\Omega(\tau)B\,cos(\varphi+\gamma)\end{bmatrix} sin(\varphi+\delta). \tag{2.42}$$

После выполнения усреднения уравнений (2.42) приходим к системе уравнений переходного процесса ротора

$$A' = -\frac{1}{2}e_r\Omega(\tau)\,sin\,\gamma + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega(\tau)B\,sin(\gamma-\delta) - \frac{1}{2}\mu_{11}A - \frac{3}{8}\mu_{31}\Omega^2(\tau)A^3,$$
$$A\gamma' = -\frac{1}{2}e_r\Omega(\tau)\,cos\,\gamma + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega(\tau)B\,cos(\gamma-\delta) + \frac{3}{8\Omega(\tau)}C_{31}A^3 - \xi_1 A,$$

$$B' = -\frac{1}{2}e_r\Omega(\tau)\sin\delta + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega(\tau)A\sin(\delta-\gamma) - \frac{1}{2}\mu_{12}B - \frac{3}{8}\mu_{32}\Omega^2(\tau)B^3,$$

$$B\delta' = -\frac{1}{2}e_r\Omega(\tau)\cos\delta + \frac{1}{2}J_{p1}\Omega(\tau)A\cos(\delta-\gamma) + \frac{3}{8\Omega(\tau)}C_{32}B^3 - \xi_2 B. \qquad (2.43)$$

В уравнениях (2.40), (2.42) и (2.43) часто используемой формой представления изменения угловой скорости вращения вала Ω является ее линейная зависимость от времени: $\Omega(\tau) = \Omega_0 + \nu_1\tau$ или $\Omega(\bar{t}) = \Omega_0 + \nu\bar{t}$, где $\nu = \varepsilon\nu_1 \ll \omega_{n1}^2$ или ω_{n2}^2 – угловое ускорение вращения вала: при разбеге машины оно имеет положительное значение, при выбеге – отрицательное значение [40, с. 7-18; 41, с. 757-760; 42, с. 116-120].

2.5 Стационарные амплитудно-частотные характеристики. Результаты

Вычисления по формулам (11), (13) и (14) дают следующие значения безразмерных параметров: $l = 0.72$; $\bar{J}_P = 0.026$; $\bar{J}_T = 0.213$; $\bar{G} = 0.0051$; $\bar{C}_{11} = 2.37$; $\bar{C}_{12} = 2.84$; $e_r = 0.0346$; $J_{P1} = 0.021$; $\omega_{n1} = 1$, $\omega_{n2} = 1.1$. Значения безразмерных параметров C31= C32=0.1; μ11=0.01, 0.02, 0.04; μ12=0.01, 0.02, 0.04; μ31=0.01, 0.02, 0.04; μ32=0.01, 0.02, 0.04 были выбраны из правильного физического соображения. Так как, при значениях C31= C32=0.1 и μ3i =0.01, 0.02 (i=1, 2) хорошо будут замечены наклоны резонансных кривых и прыжковые эффекты, при μ3i=0.04 (i=1, 2) эти эффекты уже будут устранены.

Результаты расчета по формулам (2.9) графически представлены на рисунках 2.1 и 2.2. Из этих графиков отчетливо замечены две критические скорости и две резонансные области, соответствующие значениям линейной жесткости материала опоры в двух взаимно перпендикулярных направлениях. В области каждой критической скорости существует две резонансные кривые. Появление второй резонансной кривой связано с проекциями пассивного гироскопического момента, связывающими оба уравнения движения ротора. Чем больше значения пассивного гироскопического момента, тем выше пик амплитуды этой кривой. Область, охваченная резонансной кривой главного направления по размеру больше, чем для второго направления. Увеличение значения коэффициента линейного демпфирования (рисунки 2.1 a, c, e и рисунки 2.2, a, c, e) или нелинейного кубического демпфирования (при постоянном значении линейного демпфирования) (рисунки 2.1 b, d, f и рисунки 2.2, b, d, f) по одному из направлений подавляет максимальные резонансные амплитуды колебаний данного направления и колебаний перпендикулярного направления,

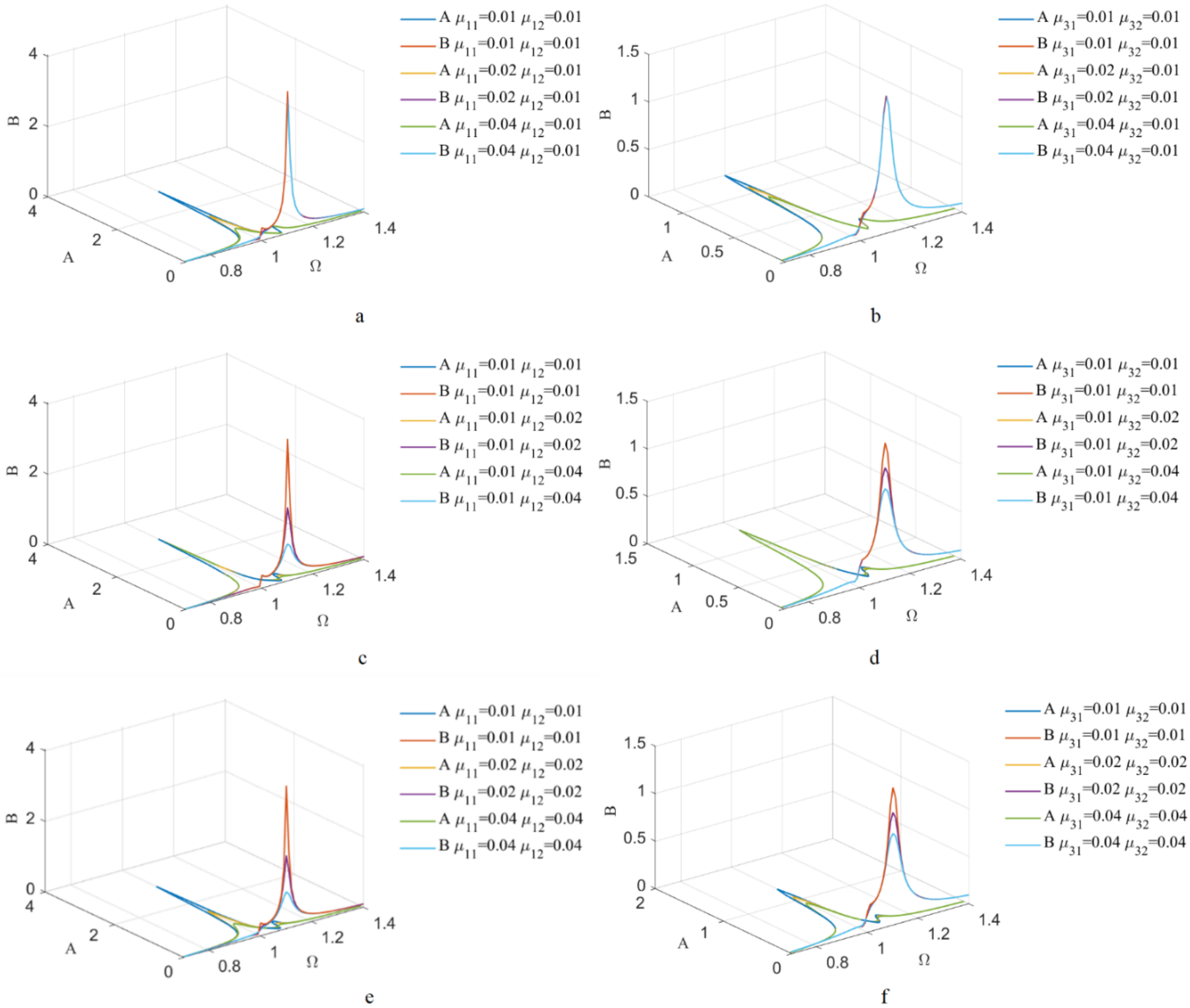


Рисунок 2.1 - Стационарные амплитудно-частотные характеристики при C31= C32=0

но соответствующие данной критической скорости. Сравнительный анализ показывает, что кубическая нелинейная составляющая демпфирования (при постоянном значении линейного демпфирования) (рисунок 2.1 b, d, f, рисунок 2.2, b, d, f) подавляет амплитудные пики резонансных кривых более значительно, чем линейное демпфирование.

Графики на рисунке 2.2 показывают, что при неравномерностях линейной жесткости во взаимно перпендикулярных направлениях и наличии нелинейной кубической составляющей жесткости материала гибкой опоры в обоих направлениях у резонансных кривых главных направлений имеются четыре прыжковых эффекта (на рисунках приведены 2 прыжковых эффекта, соответствующего направлению увеличения скорости ротора). Они эффективнее могут быть устранены с увеличением величины кубической нелинейной составляющей демпфирования (при постоянном значении линейного демпфирования) (рисунок 2.2, b, d, f) по сравнению с линейным демпфированием (рисунок 2.2, a, c, e). Отсутствие у второй резонансной кривой прыжковых переходов объясняется тем, что она находится в области с большим значением коэффициента нелинейного кубического демпфирования, где отсутствуют прыжковые эффекты, но сохраняются влияние нелинейного компонента жесткости материала опоры. При увеличении проекции пассивного гироскопического момента в сторону проекции момента силы инерции у второй резонансной кривой могут появиться прыжковые эффекты. Известно, что при изотропности линейной жесткости материала опоры резонансная кривая может иметь всего два прыжковых эффекта, соответствующего одной критической скорости.

Графические зависимости $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(\Omega), \sigma_\beta = \sigma_\beta(\Omega)$, построенные по формулам (2.22), аналогичные графическим зависимостям $A = A(\Omega), B = B(\Omega)$, построенные по формулам (2.18), на рисунках 2.1 и 2.2.

При различии значений нелинейной составляющей жесткости материала опоры наклоны резонансных кривых главных направлений различные в зависимости от этих значений.

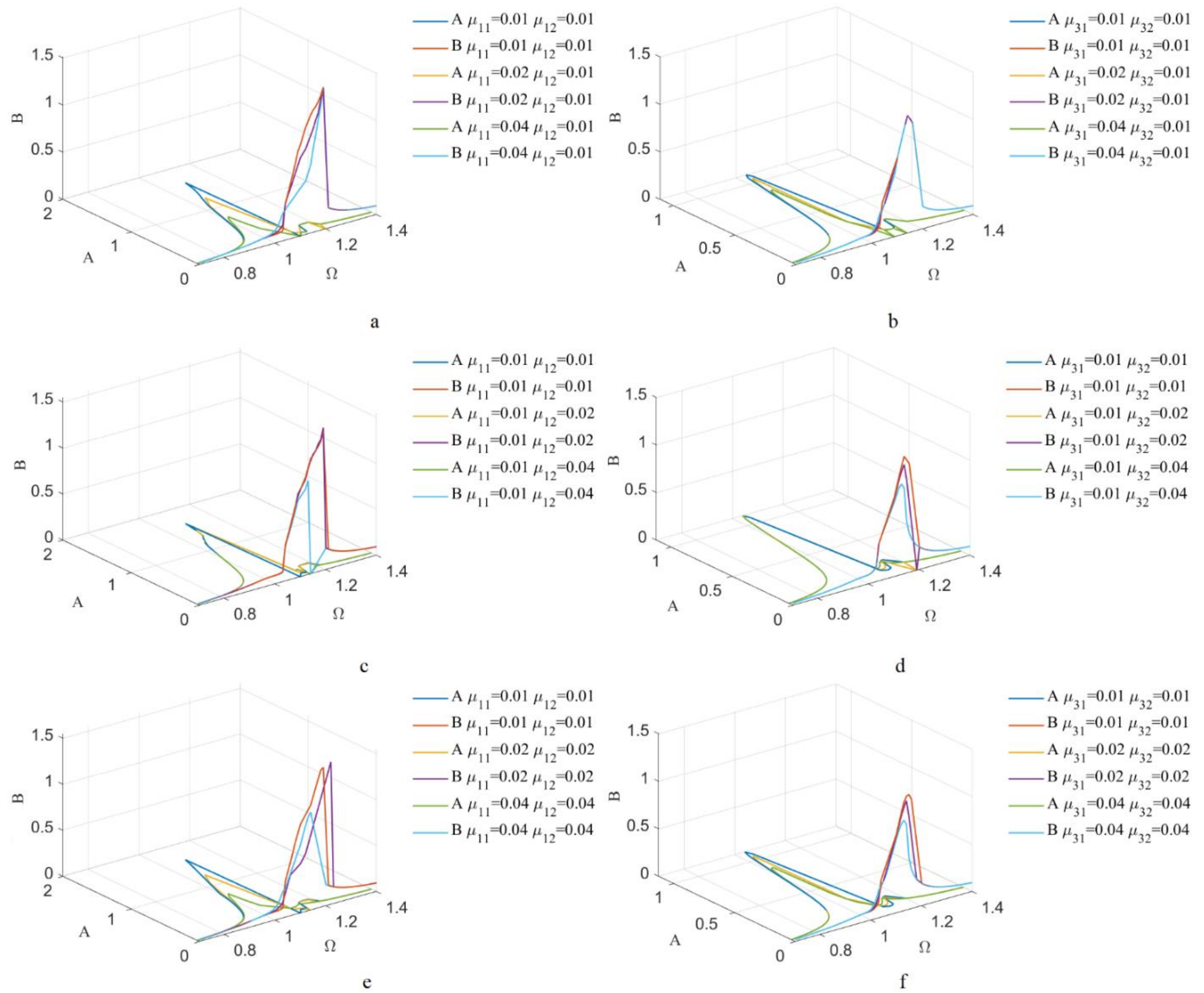


Рисунок 2.2 - Стационарные амплитудно-частотные характеристики при C31= C32=0.1

Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим согласием результатов аналитического решения и численного решения уравнений движения ротора (2.12) (см. рисунки 2.3 – 2.8) и подавлением амплитуд вариаций угловых координат, построенных прямым моделированием,

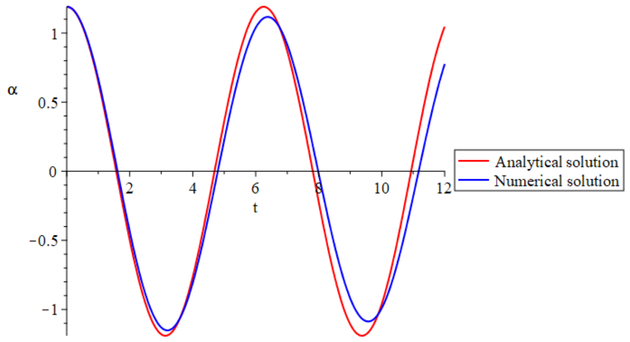


Рисунок 2.3 - Осциллограммы $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений при значениях μ31=0.01, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

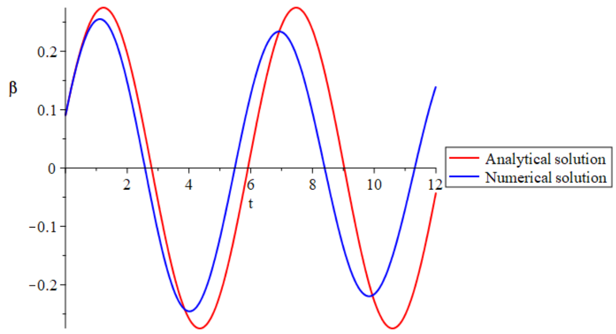


Рисунок 2.4 - Осциллограммы $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений движения при значениях μ31=0.01, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

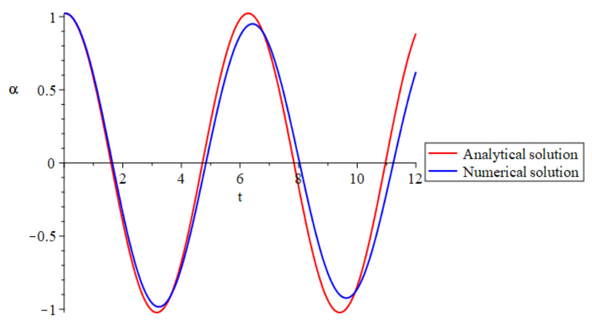


Рисунок 2.5 - Осциллограммы$\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений при значениях μ31=0.02, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

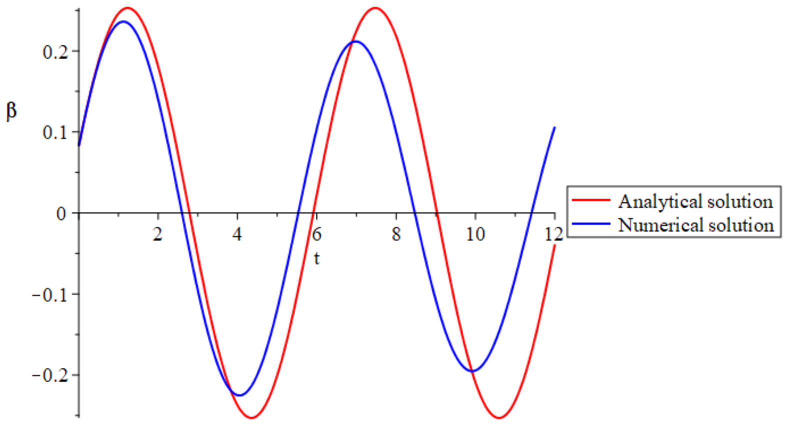


Рисунок 2.6 - Осциллограммы $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений движения при значениях μ31=0.02, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

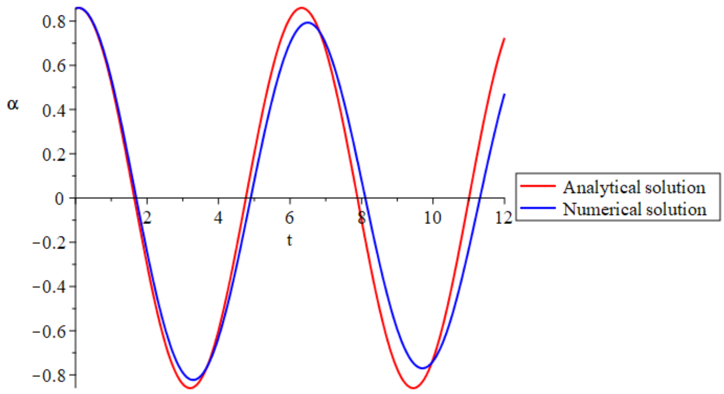


Рисунок 2.7 - Осциллограммы $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений при значениях μ31=0.04, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

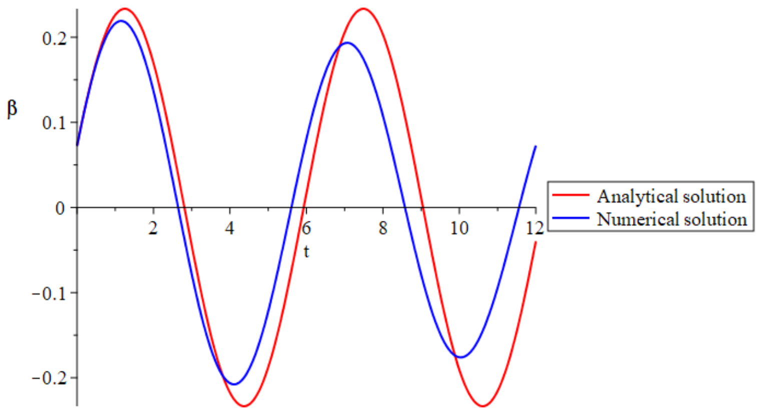


Рисунок 2.8 - Осциллограммы $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений движения при значениях μ31=0.04, μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

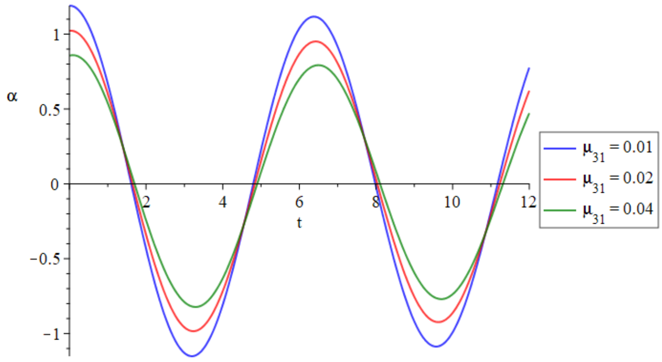


Рисунок 2.9 - Осциллограммы $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений движения при различных значениях μ31 и постоянных значениях μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

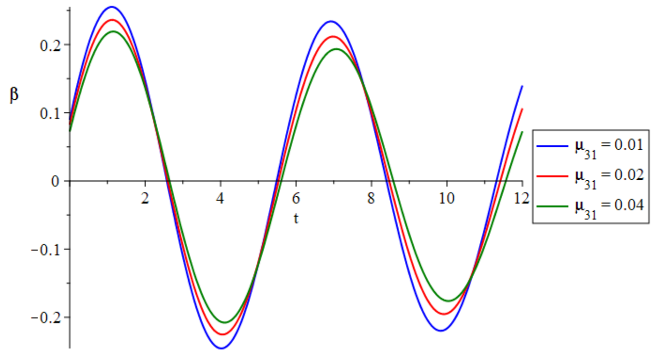


Рисунок 2.10 - Осциллограммы $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений движения при различных значениях μ31 и постоянных значениях μ32=0.01 и μ11=μ12=0.01

Кубической нелинейностью демпфирования при неизменном линейном демпфировании (рисунки 2.10 и 2.11). Сравнение аналитических и численных решений уравнений (12) произведено при следующих параметрах: Ω=1.0067; C31= C32=0; μ31=0.01, 0.02, 0.04; μ32=0.01; μ11=μ12=0.01.

2.6 Нестационарные амплитудно-частотные зависимости

При медленном увеличении скорости вращения вала с ν=0.00025 и $\bar{t} = 0$для Ω0 =0.7 начальные значения угловых координат и их производных $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ формируются решениями системы уравнений (2.43) и использованием выражений (2.37). С использованием начальных условий разрешены система уравнений (2.47) нестационарных резонансных прямых переходных процессов и результаты решения (2.47) представлены на рисунках 2.11 и 2.12. Сравнение нестационарных амплитудно-частотных зависимостей со стационарными амплитудно-частотными характеристиками (рисунки 2.1 и 2.2) свидетельствует их подобность (чем меньше значение ν, тем больше), при увеличении значения коэффициента нелинейного кубического демпфирования максимум амплитуды смещается в сторону меньших скоростей вращения и ее величина уменьшается. После пиковых резонансных амплитуд колебаний основного направления в частотных областях наблюдается биение. Если резонансные возвышенности неосновного направления попадают в область биения колебаний основного направления, то они также подвергаются этому образу колебаний. Затухающие биения происходят в окрестности резонанса вследствие наложения вынужденных нестационарных колебаний и затухающих собственных колебаний с близко совпадающими частотами [37, с. 8-25; 39, с. 333-337]. Линейное демпфирование и нелинейное кубическое демпфирование оба подавляют резонансные кривые и возвышенности, соответствующие критической скорости направления, вдоль которого оно действует. Нелинейное кубическое демпфирование более сильнее подавляет резонансных возвышенностей с затухающим биением, чем линейное демпфирование. При наличии нелинейных компонент жесткости опоры в ортогональных направлениях резонансные кривые наклоняются и растягиваются в сторону увеличения скорости вращения вала чем больше, тем больше коэффициент жесткости. Это очень заметно при чистом линейном демпфировании возвышенностей резонансных кривых. Кроме этих особенностей, связанных с присутствием нелинейных составляющих жесткости опоры, резонансные кривые имеют прыжки, сопровождающиеся затухающими биениями.

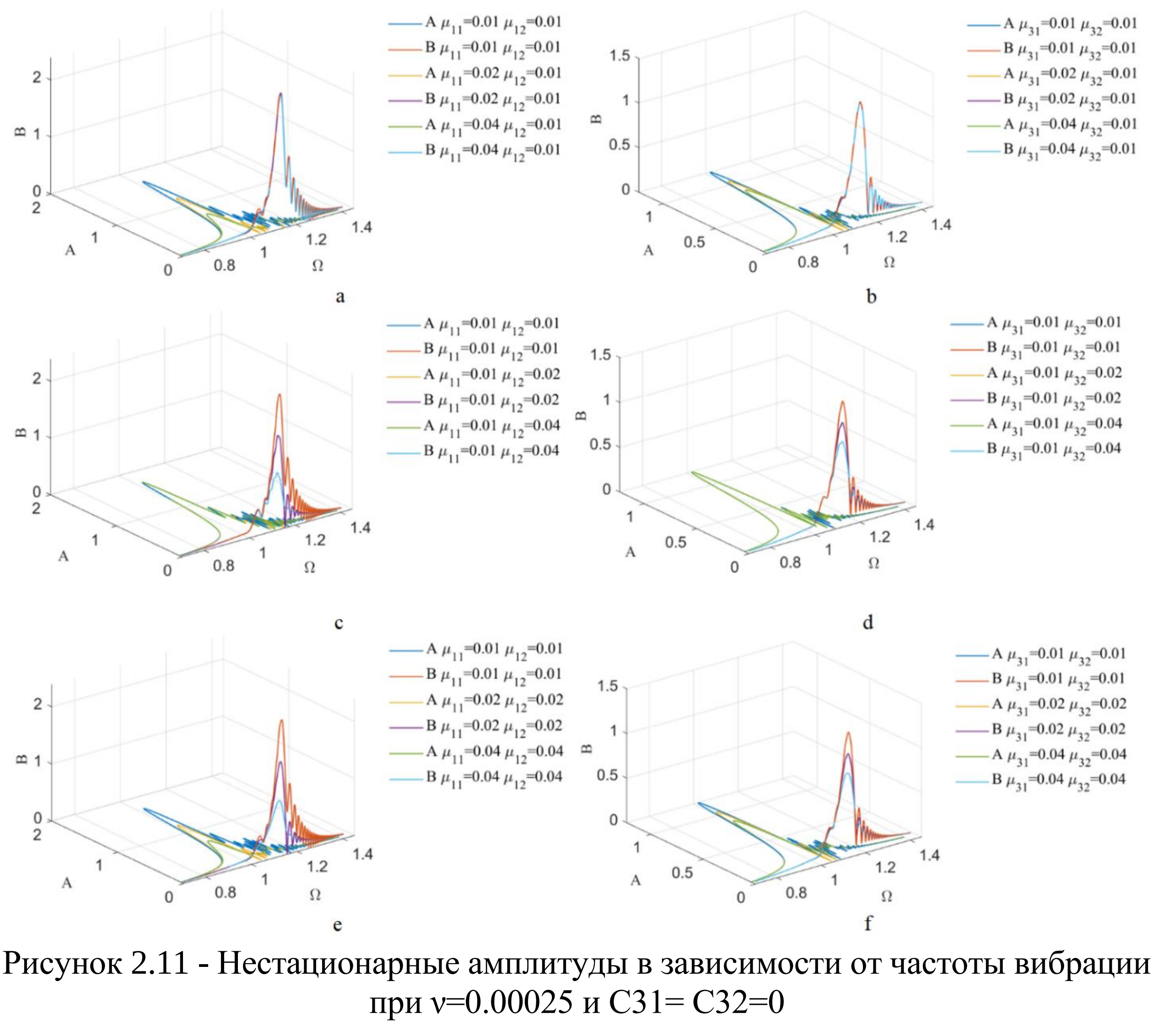


Рисунок 2.11 - Нестационарные амплитуды в зависимости от частоты вибрации при ν=0.00025 и C31= C32=0

При медленном уменьшении скорости вращения вала с ν=-0.00025 и $\bar{t} = 0$для Ω_0 =1.4 начальные значения угловых координат и их производных $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ формируются решениями системы уравнений (2.43) и использованием выражений (2.33) для случая ν=0.00025. Решения системы уравнений (2.43) нестационарных резонансных обратных переходных процессов с использованием начальных условий приведены на рисунках 2.13 и 2.14. Резонансные переходы на рисунках 2.13 и 2.14 графически похожие на аналогичные графические резонансные переходы на рисунках 2.11 и 2.12. Резонансные возвышенности, соответствующие каждой критической скорости и затухающее биение, подавляются и линейным демпфированием, и нелинейным кубическим демпфированием, но нелинейным демпфированием более значительнее. Отличие состоит в том, что биение наблюдается в области скорости вращения, ниже критической скорости.

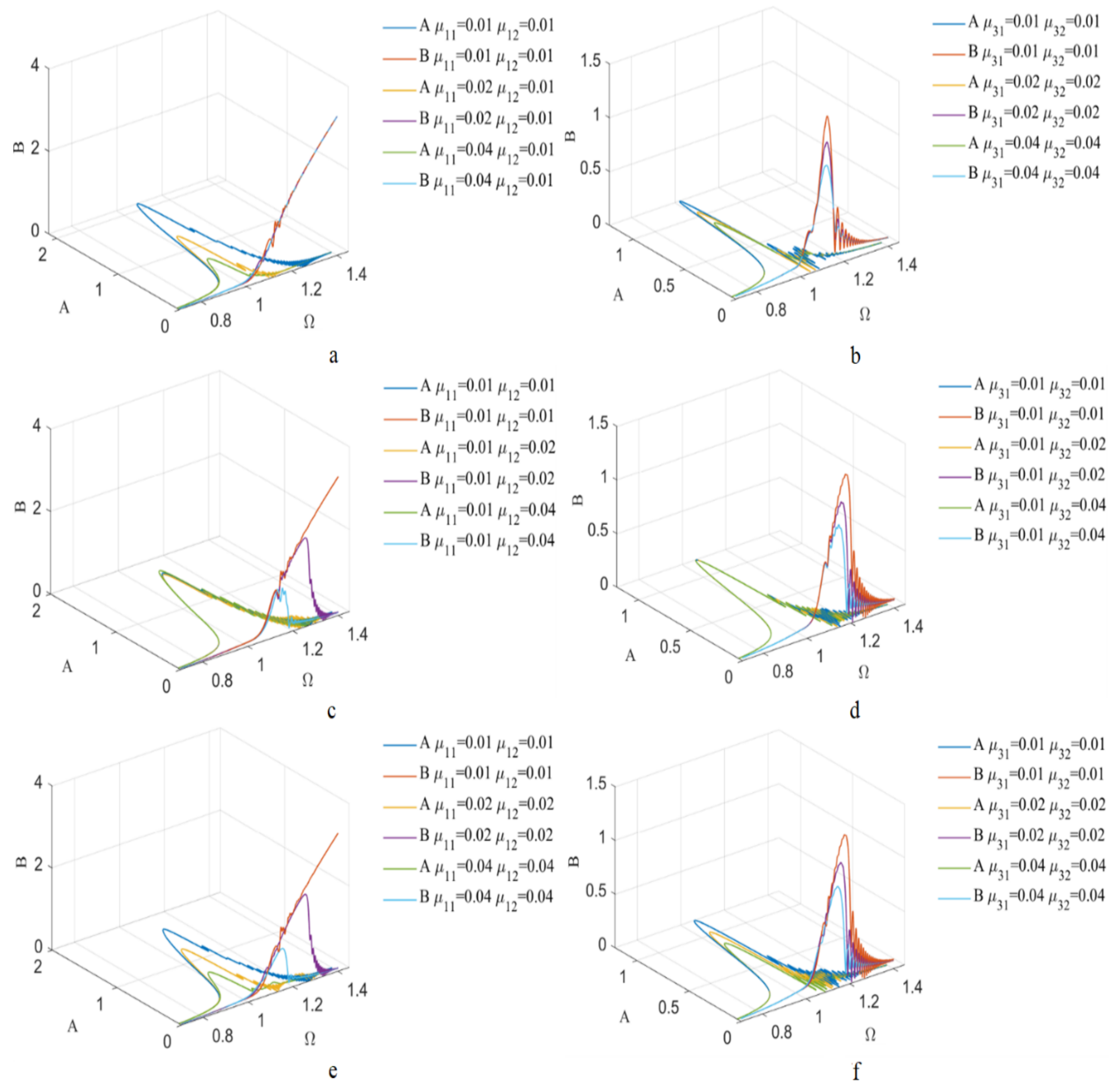


Рисунок 2.12 - Нестационарные амплитуды в зависимости от частоты вибрации при ν=0.00025 и C31= C32=0.1

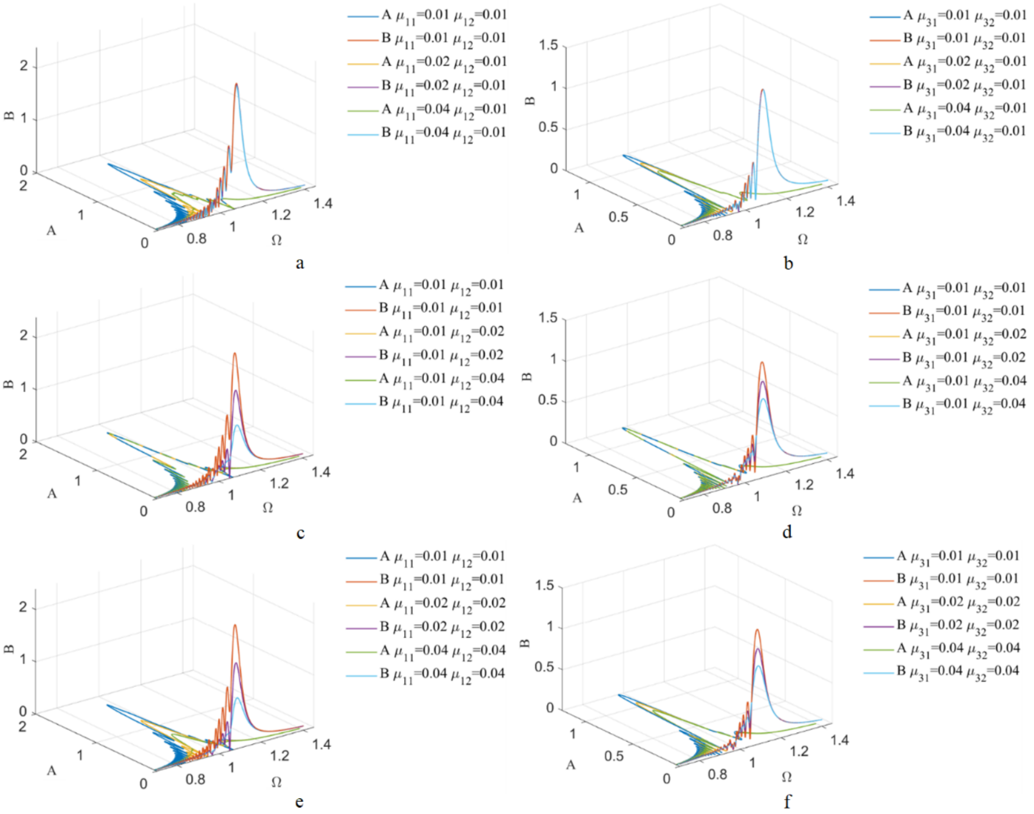


Рисунок 2.13 - Нестационарные амплитуды в зависимости от частоты вибрации при ν=-0.00025 и С31= С32=0

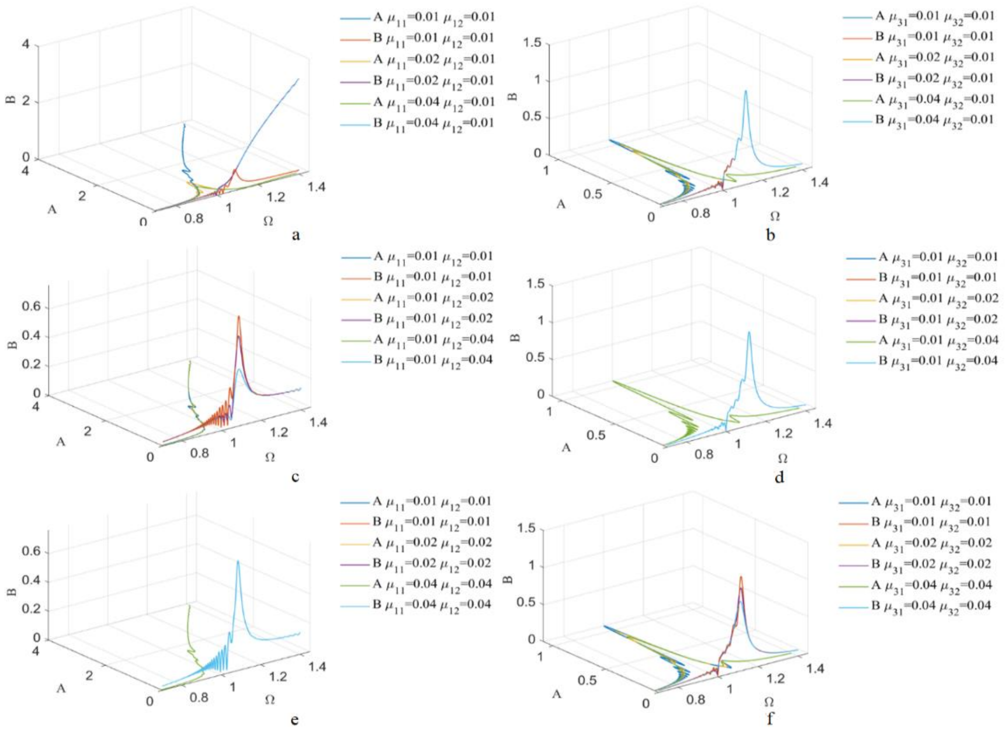


Рисунок 2.14 - Нестационарные амплитуды в зависимости от частоты вибрации при ν=-0.00025 и С31= С32=0.1

3 РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМИ И ДЕМПФИРУЮЩИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

3.1 Уравнения движения

Рассматривается гироскопическая роторная система, состоящая из диска, вала, опорной конструкции и неидеального источника энергии с характеристикой, представленной в общей форме (рисунок 3.1). Диск ротора имеет массу m, полярный момент инерции I_P и поперечный момент инерции I_T и закреплен на верхнем конце жесткого вала. Вал с длиной l_1, установлен вертикально с помощью нижней универсальной шарнирной и верхней упругой опоры. Расстояние между опорами l_2. Скорость вращения вала вокруг оси симметрии $\dot{\varphi}$. Верхняя опора обладает восстанавливающими и демпфирующими свойствами: линейной жесткостью c_1, нелинейной кубической жесткостью c_3, линейным демпфированием μ_{D1}, нелинейным кубическим демпфированием μ_{D3}. В системе координат $Oxyz$положение геометрического центра диска O_1 задается координатами x, y, z, а положение вала и в целом ротора–углами Эйлера α , β и углом поворота φ . Углы α , β малы, и следовательно, можно принять, что $z = l_1 = const$ и перемещением геометрического центра диска в направлении z можно пренебречь. Центр масс диска имеет координаты x_S и y_S. Предполагаем также, что эксцентриситет массы e_r имеет направление оси N системы координат $ONKZ$.

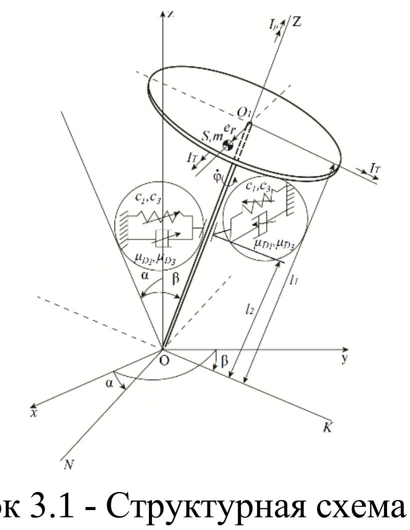


Рисунок 3.1 - Структурная схема ротора

Проекции угловой скорости ротора в координатных осях системы $ONKZ$, координаты центра масс диска и координаты верхней опоры выразим через угловые координаты α , β и φ . Находим выражения кинетической энергии, потенциальной энергии ротора, функции Релея и проекции момента силы тяжести, действующей на систему. Подставив их в уравнения Лагранжа второго рода, получим дифференциальные уравнения движения ротора [4, с. 38-42].

Определив собственную частоту колебаний полученной роторной системы [4, с. 38-42] выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(c_1 l_2^2 - mgl_1)}{[ml_1^2 - (I_P - I_T)]}} \qquad (3.1)$$

и используя следующие безразмерные параметры

$$e = e_r/[l_1(1+\bar{I}_T)];\ l = \frac{l_2}{l_1}; \bar{t} = t\omega_0; \bar{I}_{p1} = \frac{I_p}{[ml_1^2(1+\bar{I}_T)]}; \bar{I}_T = \frac{I_T}{(ml_1^2}); $$
$$C_1 = \frac{c_1}{[m\omega_0^2(1+\bar{I}_T)]}; C_3 = \frac{c_3 l_2^4}{[ml_1^2\omega_0^2(1+\bar{I}_T)]}; G = \frac{g}{[l_1\omega_0^2(1+\bar{I}_T)]};$$
$$\mu_1 = \frac{\mu_{D1}}{[ml_1^2\omega_0(1+\bar{I}_T)]}; \mu_3 = \frac{\mu_{D3}\omega_0}{[ml_1^2(1+\bar{I}_T)];} M = M_m/[ml_1^2\omega_0^2(1+\bar{I}_T)], \qquad (3.2)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 l_2^2 - Gl_1}{ml_1^2 - (I_P - I_T)}} \qquad (3.2a)$$

- собственная частота роторной системы [13, с. 2437-2446], получим уравнения движения ротора в виде системы безразмерных уравнений:

$$\alpha'' + \omega_n^2\alpha = e\varphi'^2 \cos\varphi - I_{P1}\varphi'\beta' - \mu_1\alpha' - \mu_3\alpha'^3 - C_3\alpha^3,$$
$$\beta'' + \omega_n^2\beta = e\varphi'^2 \sin\varphi + I_{P1}\varphi'\alpha' - \mu_1\beta' - \mu_3\beta'^3 - C_3\beta^3,$$
$$\varphi'' = \frac{[e(\alpha''\sin\varphi - \beta''\cos\varphi) - I_{P1}(\alpha''\beta + \alpha'\beta') + M(\varphi')]}{I_{P1}}, \qquad (3.3)$$

где

$$\sqrt{\frac{(C_1 l^2 - G)}{(1+\bar{I}_T)}} = \omega_n \qquad (3.4)$$

- собственная частота колебаний роторной системы (3.3) при $\bar{I}_T \gg \bar{I}_p$.

В системе уравнений (3.3) безразмерный динамический момент источника энергии (двигателя) в соответствии с [5, с. 329-335]:

$$M(\varphi') = L(\varphi') - q\varphi', \qquad (3.5)$$

где $L(\varphi')$ - вращающий момент (характеристика) двигателя, q - коэффициент сопротивления вращению ротора двигателя.

При выводе уравнений движения (3.3) были приняты следующие приближения. В резонансной и близкой к ней области $\varphi'' \ll \varphi'^2$, и следовательно, возмущения, содержащие φ'', возмущения, имеющие параметр $\bar{I}_p \ll \bar{I}_T$ и возмущения, имеющие величины второго и более высокого порядков малости относительно α, β, их производные, и их комбинации малы в сравнении с возмущениями, амплитуды которых пропорциональны квадрату угловой скорости вала. Следовательно, они отброшены из уравнений (3.3).

3.2 Решения уравнений движения методом усреднения

Рассмотрим роторную систему, близкую к линейной системе. Для применения метода теории малых возмущений Боголюбова-Крылова [37, с. 9-26; 40, с. 7-18] к решению уравнений (3.3) принимаются следующие ограничения. Компоненты моментов линейной и кубической нелинейной демпфирующей силы $\mu_1\alpha', \mu_1\beta'$ и $\mu_3\alpha'^3, \mu_3\beta'^3$, а также момента кубического компонента силы упругости $C_3\alpha^3, C_3\beta^3$, момента силы инерции дисбаланса массы $e\varphi'^2 cos\,\varphi, e\varphi'^2 sin\,\varphi$ считаются малыми по сравнению с компонентами моментов силы инерции вибрации и линейной упругой силы, действующих в системе. Проекции момента пассивной гироскопической силы $I_{P1}\varphi'\alpha'$ и $I_{P1}\varphi'\beta'$ можно считать малыми при предположении, что $\bar{I}_p \ll \bar{I}_T$. Ограничимся также рассмотрением быстродвижущегося ротора: $\varphi'^2 \gg G$ и рассмотрением движения в области, где частота вынужденных колебаний Ψ близка к частоте свободных колебаний ω_n. Следовательно, будем искать решения (3.3) в виде замены переменных:

$$\alpha = A\,cos(\varphi + \chi)\,, \frac{d\alpha}{d\bar{t}} = -A\Omega\,sin(\varphi + \chi)\,,$$
$$\beta = A\,sin(\varphi + \chi)\,, \frac{d\beta}{d\bar{t}} = A\Omega\,cos(\varphi + \chi)\,, \Psi = \frac{d\varphi}{d\bar{t}}. \tag{3.6}$$

ЗдесьA, χ и Ψ – медленно изменяющиеся функции времени $\bar{t}$, основные параметры колебательного процесса: A - амплитуда колебаний, χ - угол сдвига фаз между угловой координатой α или β и момента силы возмущения, Ψ - частота момента силы возмущения или угловая скорость вращения вала двигателя.

Следуя методу Боголюбова-Крылова, получим систему уравнений относительно A, χ, Ψ приближенные решения которой представим в виде

$$\Psi = \Omega + \varepsilon U_{11}(\bar{t}, \Omega, a, \xi), A = a + \varepsilon U_{12}(\bar{t}, \Omega, a, \xi), \chi = \xi + \varepsilon U_{13}(\bar{t}, \Omega, a, \xi), \tag{3.7}$$

где $\varepsilon U_{11}(\bar{t}, \Omega, a, \xi), \varepsilon U_{12}(\bar{t}, \Omega, a, \xi)$ и $\varepsilon U_{13}(\bar{t}, \Omega, a, \xi)$ – малые периодические функции времени $\bar{t}$, $\varepsilon \ll 1$– малый параметр. Величины Ω, a, ξ определяются из уравнений первого приближения.

После выполнения усреднения уравнений первого приближения, эквивалентных к системе (3.3), и приравнивая их правые части к нулю, приходим к уравнениям для определения частоты вынужденных колебаний Ω

$$L(\Omega) - q\Omega - \frac{(\mu_1 + 0.75\mu_3\omega_n^2 a^2)}{\Omega}\omega_n^2 a^2 = 0, \tag{3.8}$$

для определения амплитуды колебаний a:

$$\{(\mu_1\omega_n + 0.75\mu_3\omega_n^3 a^2)^2 + [0.75C_3 a^2 + 2\omega_n(\omega_n - \Omega)]^2\}a^2 = (e\Omega^2)^2. \tag{3.9}$$

и выражению для определения фазы колебаний ξ

$$tan\,\xi = -\frac{\mu_1\omega_n + 0.75\mu_3\omega_n^3 a^2}{0.75C_3 a^2 + 2\omega_n(\omega_n - \Omega)}. \tag{3.10}$$

Таким образом, уточненные угловые координаты ротора α и β по (3.6) можно записать в виде [37, с. 9-28]:

$$\begin{gathered}\alpha = a\,cos(\Omega\bar{t} + \xi) + \varepsilon a_{11}\,cos(\Omega\bar{t} + \xi_{11}) + \varepsilon a_{12}\,cos(3\Omega\bar{t} + \xi_{12}) \\ +\varepsilon a_{13}\,cos(5\Omega\bar{t} + \xi_{13}), \\ \beta = a\,sin(\Omega\bar{t} + \xi) + \varepsilon a_{21}\,sin(\Omega\bar{t} + \xi_{12}) + \varepsilon a_{22}\,sin(3\Omega\bar{t} + \xi_{22}) \\ +\varepsilon a_{23}\,sin(5\Omega\bar{t} + \xi_{23}), \\ \varphi = \Omega\bar{t} - \frac{1}{8\Omega}a^2\omega_n(\omega_n + \Omega)\,sin\,2\,(\varphi + \xi),\end{gathered} \tag{3.11}$$

где постоянные $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \xi_{11}\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}$ определяются из равенств

$$\begin{aligned}&\varepsilon a_{11}\,cos(\Omega\bar{t} + \xi_{11}) \\ &\qquad = \frac{e(\Omega^2 + \bar{G})}{8\omega_n\Omega}cos\,\Omega\,\bar{t} - \frac{C_3 a^3}{16\omega_n\Omega}cos(\Omega\bar{t} + \xi) + \frac{(\mu_1 + \mu_3\omega_n^2 a^2)a}{8\Omega}sin(\Omega\bar{t} + \xi), \\ &\varepsilon a_{12}\,cos(3\Omega\bar{t} + \xi_{12}) \\ &\qquad = \frac{e(\Omega^2 + \bar{G})}{8\omega_n\Omega}cos(3\Omega\bar{t} + 2\xi) + \frac{\left(\mu_1 + \frac{7}{8}\mu_3\omega_n^2 a^2\right)a}{8\Omega}sin\,3\,(\Omega\bar{t} + \xi) \\ &-\frac{5C_3 a^3}{64\omega_n\Omega}cos\,3\,(\Omega\bar{t} + \xi), \\ &\varepsilon a_{13}\,cos(5\Omega\bar{t} + \xi_{13}) = -\frac{\mu_3\omega_n^2 a^3}{64\Omega}sin\,5\,(\Omega\bar{t} + \xi) - \frac{C_3 a^3}{64\omega_n\Omega}cos\,5\,(\Omega\bar{t} + \xi), \\ &\varepsilon a_{21}\,sin(\Omega\bar{t} + \xi_{21}) \\ &\qquad = -\frac{e(\Omega^2 + \bar{G})}{8\omega_n\Omega}sin\,\Omega\,\bar{t} + \frac{C_3 a^3}{16\omega_n\Omega}sin(\Omega\bar{t} + \xi) + \frac{(\mu_1 + \mu_3\omega_n^2 a^2)a}{8\Omega}cos(\Omega\bar{t} + \xi), \\ &\varepsilon a_{22}\,sin(3\Omega\bar{t} + \xi_{22}) \\ &\qquad = \frac{e(\Omega^2 + \bar{G})}{8\omega_n\Omega}sin(3\Omega\bar{t} + 2\xi) - \frac{\left(\mu_1 + \frac{9}{8}\mu_3\omega_n^2 a^2\right)a}{8\Omega}cos\,3\,(\Omega\bar{t} + \xi) \\ &-\frac{3C_3 a^3}{64\omega_n\Omega}sin\,3\,(\Omega\bar{t} + \xi), \\ &\varepsilon a_{23}\,sin(5\Omega\bar{t} + \xi_{23}) = \frac{\mu_3\omega_n^2 a^3}{64\Omega}cos\,5\,(\Omega\bar{t} + \xi) - \frac{C_3 a^3}{64\omega_n\Omega}sin\,5\,(\Omega\bar{t} + \xi).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Тогда частота колебаний вала ротора

$$\Psi = \frac{d\varphi}{d\bar{t}} = \Omega - \frac{1}{4\Omega} a^2 \omega_n (\omega_n + \Omega) \cos 2 (\Omega \bar{t} + \xi). \tag{3.13}$$

3.3 Аналитические основы метода

Для непосредственного моделирования динамики ротора по уравнениям (3.3) и сравнения его результатов с результатами аналитических исследований в случае неизвестной характеристики источника возбуждения используется метод, суть которого заключается в следующем.

Для слабых нелинейных колебаний, в предположении, что $\varphi'' \ll \varphi'^2$ угловую скорость стационарного вращения вала Ω можно заменить на φ'. Тогда для резонансной области, в первом приближении, уравнение для частоты вынужденных колебаний ротора можно записать в виде [4, с. 38-42]:

$$L(\varphi') - q\varphi' - (\mu_1 + 0.75\mu_3 \omega_n^2 a^2)\omega_n a^2 = 0, \tag{3.14}$$

где a–амплитуда стационарных колебаний ротора. Корнями уравнения (3.14) являются точки пересечения графика $L(\varphi')$–характеристики двигателя и графика $S(\varphi')$–момента сил сопротивления вращательному движению ротора двигателя и сил демпфирования колебательного движения ротора:

$$S(\varphi') = q\varphi' + (\mu_1 + 0.75\mu_3 \omega_n^2 a^2)\omega_n a^2 \tag{3.15}$$

Здесь a^2 можно определить как корень кубического уравнения – уравнения частотной характеристики стационарных колебаний ротора:

$$\{(\mu_1\omega_n + 0.75\mu_3\omega_n^3 a^2)^2 + [0.75C_3 a^2 + 2\omega_n(\omega_n - \varphi')]^2\}a^2 = (e\varphi'^2)^2:$$

$$a^2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a_0}{3}\right)^3 - \frac{a_0 b_0}{3} + c_0\right] + \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{a_0^2}{3} + b_0\right)\right]^3 + \left\{\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a_0}{3}\right)^3 - \frac{a_0 b_0}{3} + c_0\right]\right\}^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a_0}{3}\right)^3 - \frac{a_0 b_0}{3} + c_0\right] - \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{a_0^2}{3} + b_0\right)\right]^3 + \left\{\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a_0}{3}\right)^3 - \frac{a_0 b_0}{3} + c_0\right]\right\}^2}} - \frac{a_0}{3}, \tag{3.16}$$

где

$$a_0 = \frac{1.5\mu_1\mu_3\omega_n^4 + 3C_3\omega_n(\omega_n - \varphi')}{0.5625(\mu_3^2\omega_n^6 + C_3^2)}, b_0 = \frac{\mu_1^2\omega_n^4 + 4\omega_n^2(\omega_n - \varphi')^2}{0.5625(\mu_3^2\omega_n^6 + C_3^2)}, c_0 = -\frac{(e\varphi'^2)^2}{0.5625(\mu_3^2\omega_n^6 + C_3^2)}. \quad (3.17)$$

Для сравнительного анализа результатов численного решения предложенным методом с результатами аналитического решения и численного решения уравнений движения ротора с заданной характеристикой источника возбуждения используются выражения уточнённого аналитического решения

$$\alpha = a\cos(\Omega\bar{t} + \xi) + \ldots, \beta = a\sin(\Omega\bar{t} + \xi) + \ldots, \varphi = \Omega\bar{t} + \ldots,$$
$$\alpha' = -a\Omega\sin(\Omega\bar{t} + \xi) + \ldots, \beta' = a\Omega\cos(\Omega\bar{t} + \xi) + \ldots, \varphi' = \Omega + \ldots \quad (3.18)$$

и выражение механической характеристики двигателя постоянного тока [4]

$$M(\varphi') = u_1 - u_2\varphi'. \quad (3.19)$$

Здесь в (3.18) вторые и другие слагаемые, связанные с гармониками высокого порядка, с их значениями приведены в [4, с. 38-42], в (3.19): u_1– параметр контроля, u_2– параметр, зависящий от вида источника энергии [5, с. 329-335].

Для непосредственного интегрировании уравнений (3.3) с учетом выражения (3.15) - (3.17) использованы следующие безразмерные параметры диска: эксцентриситет центра масс e =0.0346 и момент инерции относительно оси вращения I_{P1}=0.021. При переводе параметров на безразмерный вид использованы измеримые значения линейных и динамических параметров, заимствованные из экспериментальной установки, использованной в работе [4, с. 38-42]. Для наглядности получаемых результатов были приняты значения коэффициента нелинейной жесткости опоры C_3=0.1 и резонансной частоты ω_n≈1.

При выборе начальных условий использованы аналитические выражения для α, β, φ и φ' с учетом высших гармоник, включительно пятой в соответствии с формулами (3.18), и значения амплитуды и начальной фазы главной гармоники стационарных колебаний, найденные по частотным характеристикам [4, с. 38-42]. Точки, которым соответствуют начальные условия выбраны до бистабильной области амплитудно-частотных кривых при различных значениях коэффициента нелинейного кубического демпфирования. С учетом всего этого начальные условия при $\bar{t}$=0 имеют вид: α_0=0.8918, β_0=-0.6092, φ_0=0.2599, α_0'=-0.6275, β_0'=0.9175, φ_0'=0.2599 при μ_3=0.01 и μ_1=0.01; α_0=0.6847, β_0=-0.7960, φ_0=0.2607, α_0'=0.8199, β_0'=0.7053, φ_0'=0.0812 при μ_3=0.02 и μ_1=0.01; α_0=0.0097, β_0=-0.9700, φ_0=0.0045, α_0'=1.0039, β_0'=0.010, φ_0'=0.4624 при μ_3=0.04 и μ_1=0.01.

Интегрирование системы уравнений (3.3) при учете выражений (3.15)–(3.17) и начальных условий осуществилось с использованием разработанных блоков и подблоков Simulink Model на базе пакета MaTLab (R2021a (9.10.0.1602886) 64-bit (win 61) 17 February 2021).

3.4 Результаты. Применение Метода

Результаты аналитического моделирования по уравнениям (3.11)-(3.13) с учетом выражений частотных характеристик (3.9) и (3.10), численного моделирования по уравнениям (3.3), (3.15)-(3.17) в сравнительной форме представлены на Рисунках 3.2 – 3.7. Сравнение осциллограмм $\alpha = \alpha(\bar{t}), \beta = \beta(\bar{t})$ при μ3=0.01 и μ1=0.01 и $\varphi = \varphi(\bar{t}), \varphi' = \varphi'(\bar{t})$ при μ3=0.01, 0.04 и μ1=0.01, построенных по численным результатам с аналогичными осциллограммами, построенными по аналитическим формулам $\alpha, \beta, \varphi, \varphi'$ и частотной характеристике (рисунки 3.2, 3.4, 3.6 – 3.9) показывает, что результаты аналитических и численных решений уравнений движения близки друг к другу, что доказывает приемлемость представленного метода численного решения. Из графиков зависимостей $\alpha = \alpha(\bar{t})$ и $\beta = \beta(\bar{t})$на Рисунках 3.3 и 3.5, соответственно, построенных по численным решениям уравнений (3.3) при различных значениях μ3=0.01, 0.02, 0.04 и при постоянном значении μ1=0.01 хорошо заметен совместный демпфирующий эффект величин μ3 и μ1 в области резонанса, что подтверждает результатов аналитических решений уравнений движения (3.3) [37, с. 9-26].

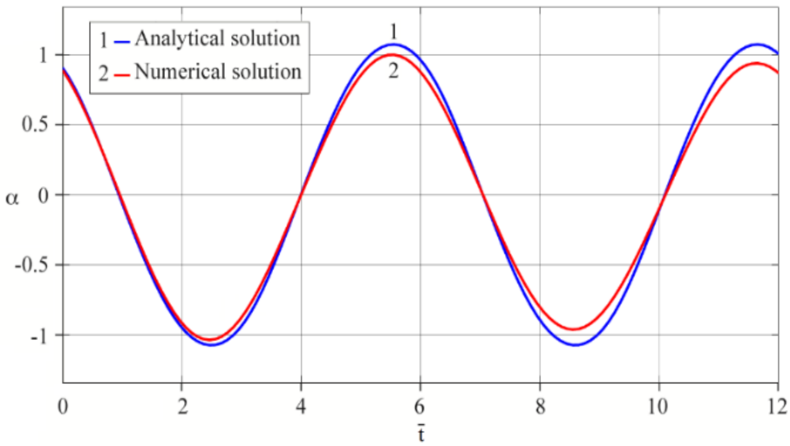


Рисунок 3.2 - Графические зависимости $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.01 и μ1=0.01

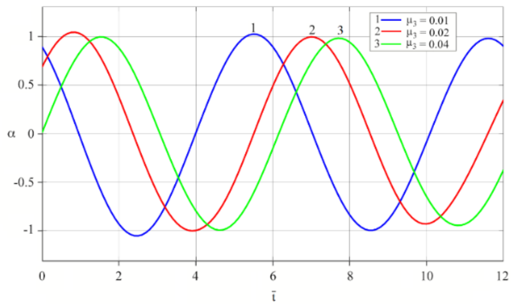


Рисунок 3.3 - Графические зависимости $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений движения (3.3) при различных значениях μ3 и μ1=0.01

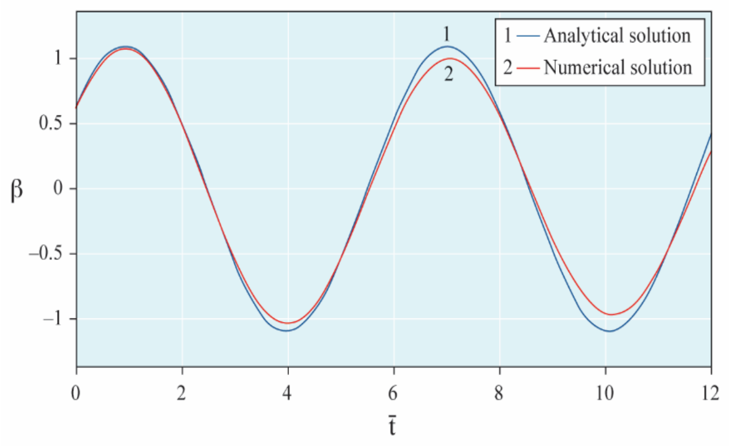


Рисунок 3.4 - Графические зависимости $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.01 и μ1=0.01

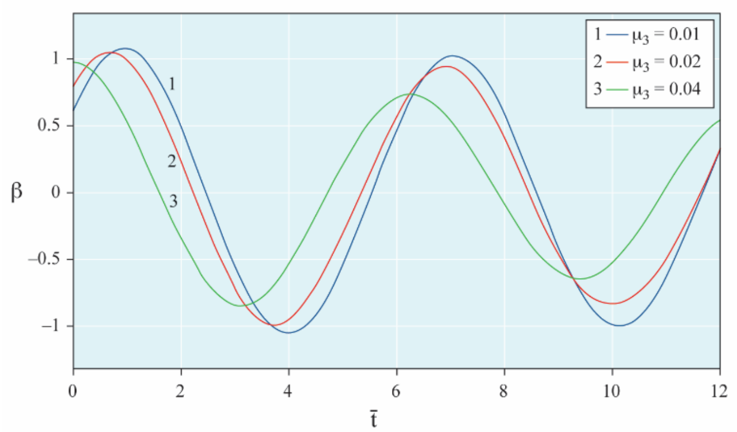


Рисунок 3.5 - Графические зависимости $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по прямым решениям уравнений движения (3) при различных значениях μ3 и μ1=0.01

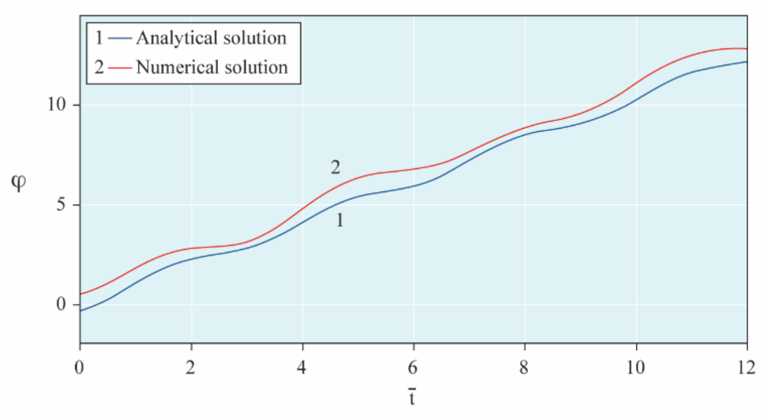


Рисунок 3.6 - Графические вариации $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.01 и μ1=0.01

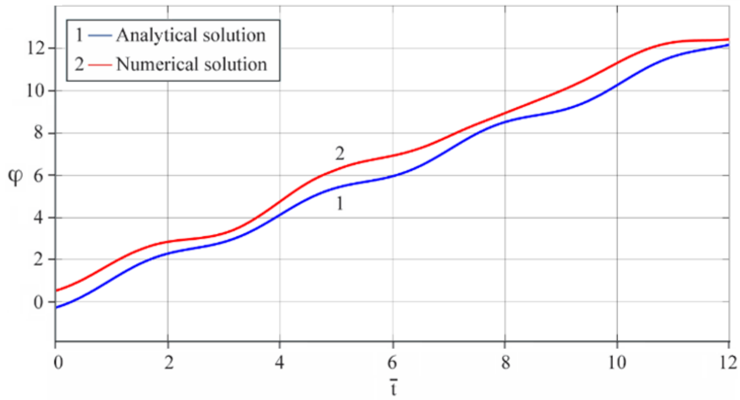


Рисунок 3.7 - Графические вариации $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.04 и μ1=0.01

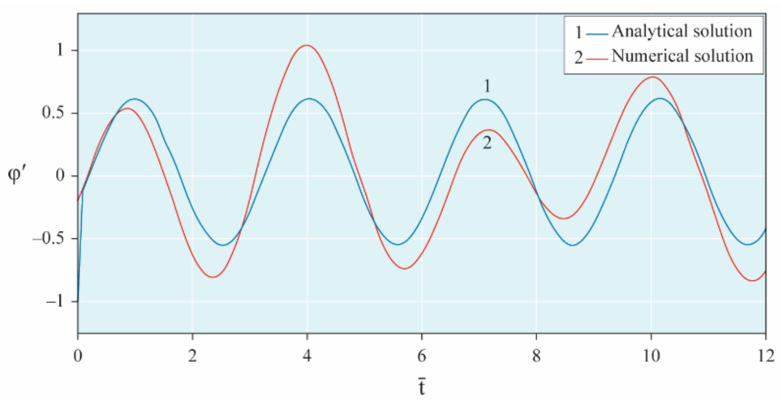


Рисунок 3.8 - Графические вариации $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.01 и μ1=0.01

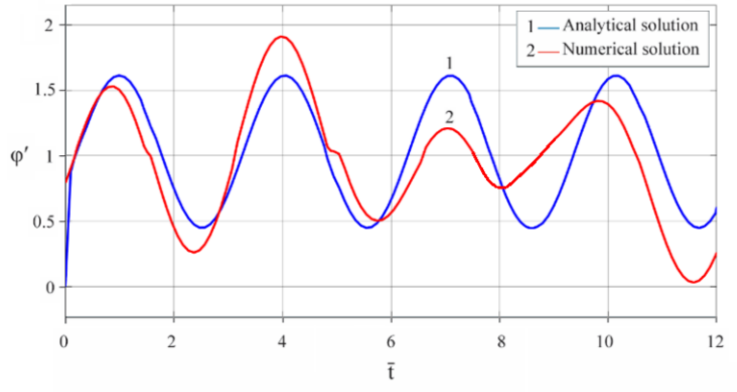


Рисунок 3.9 - Графические вариации $\varphi^{'} = \varphi^{'}(\bar{t})$, построенные по аналитическим и прямым решениям уравнений движения (3) при μ3=0.04 и μ1=0.01

Теперь разрешим систему дифференциальных уравнений движения (3.3) численным методом с помощью MatLab-Simulink при известной характеристике электродвигателя: $M(\varphi') = u_1 - u_2\varphi', u_2 = 1.245$. Результаты сопоставим с результатами прямого моделирования системы уравнений (3.3) при общей форме представления характеристики двигателя: $M = L(\varphi') - q\varphi'$ (рисунки 3.10-3.15). Из рисунков 3.10-3.15 хорошо видно близость результатов прямого моделирования системы уравнений (3.3) при $M(\varphi') = u_1 - u_2\varphi'$ и при $M = L(\varphi') - q\varphi'$. Различие этих результатов в осциллограммах $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$ (рисунки 3.14 и 3.15) объясняется с заранее заданной прямолинейной характеристикой электродвигателя. Приближенность и ограниченность предложенного метода подтверждается также увеличением расходимости результатов аналитического и численного решений уравнений движения, результатов прямого моделирования уравнений движения при общей и заданной форме характеристики двигателя относительно φ' (рисунок 3.9) и φ (рисунок 3.13), соответственно при большом значении коэффициента нелинейного демпфирования, μ_3 равном 0.04 с течением времени.

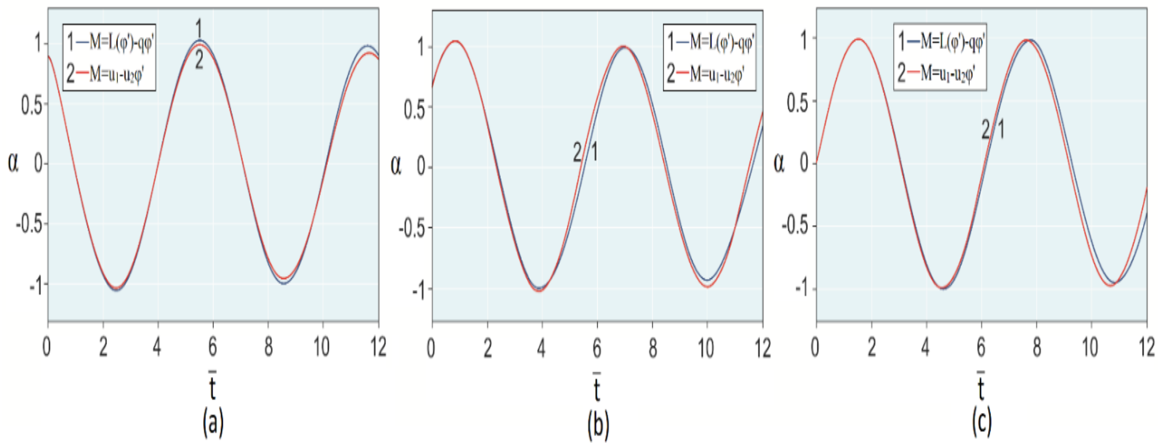


Рисунок 3.10 - Осциллограммы $\alpha = \alpha(\bar{t})$, построенные по прямому моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01 и различных значениях μ_3 и u_1: (a) 0.01 и 1.304, (b) 0.02 и 1.314, (c) 0.04 и 1.323

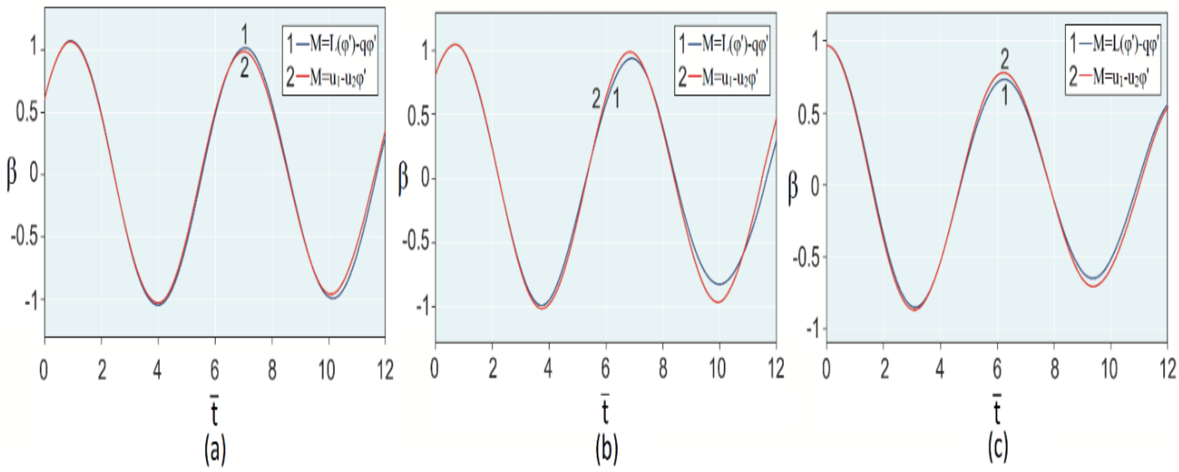


Рисунок 3.11 - Осциллограммы $\beta = \beta(\bar{t})$, построенные по прямому моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01 и различных значениях μ3 и u_1: (a) 0.01 и 1.304, (b) 0.02 и 1.314, (c) 0.04 и 1.323

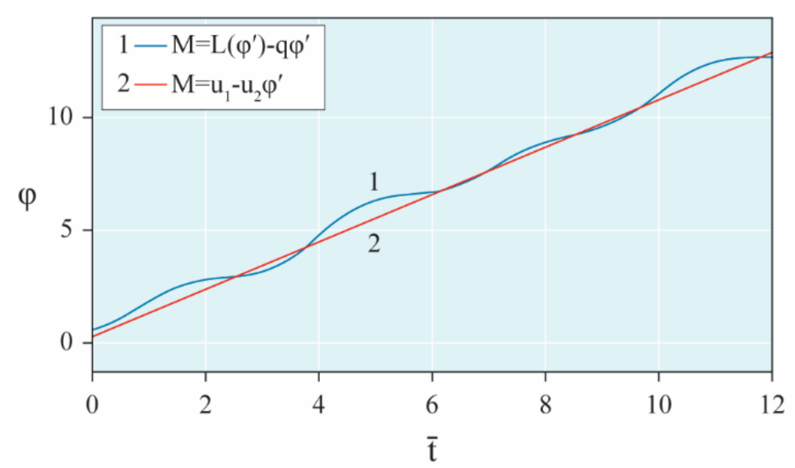


Рисунок 3.12 - Графические вариации $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по численному моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01, μ3=0.01 и. u_1=1.304

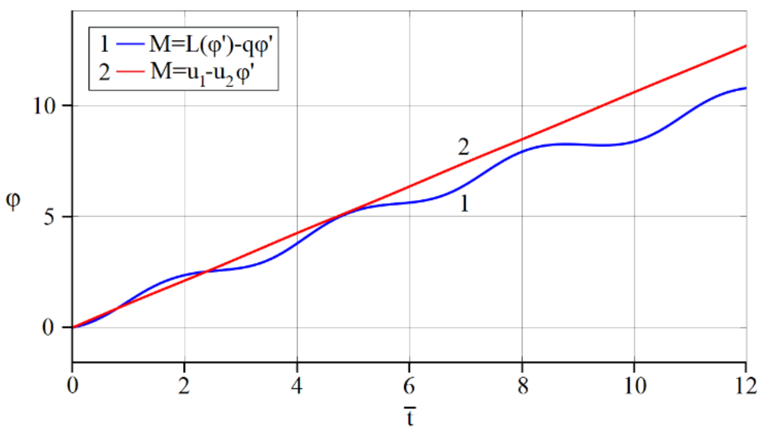


Рисунок 3.13 - Графические вариации $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по численному моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01, μ3=0.04 и. u_1=1.323

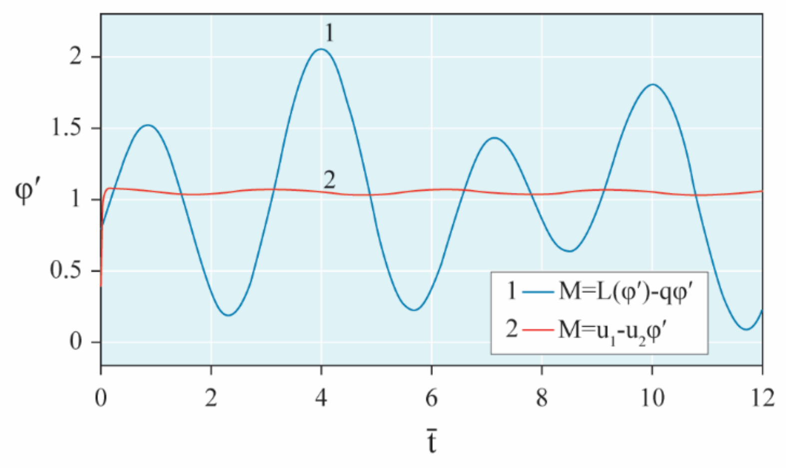


Рисунок 3.14 - Графические вариации $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по численному моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01, μ3=0.01 и. u_1=1.304

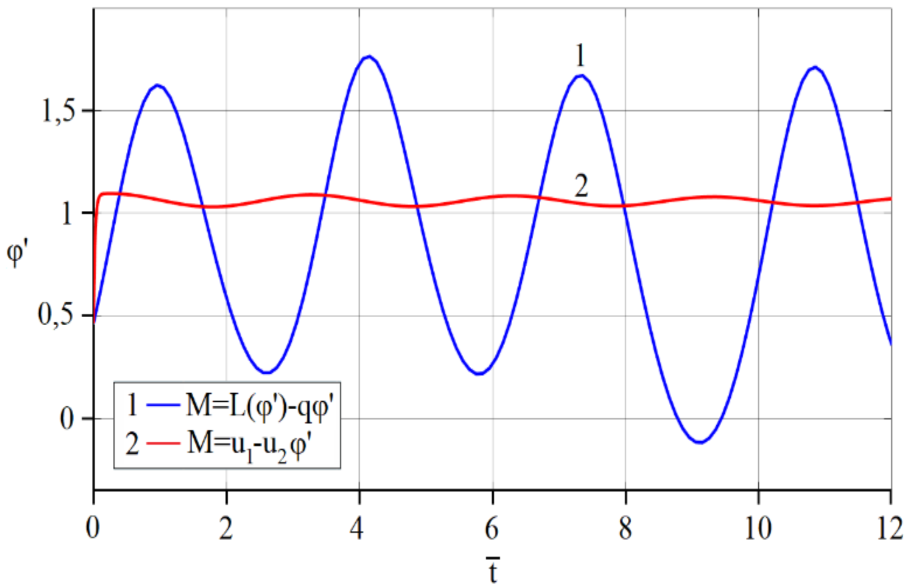


Рисунок 3.15 - Графические вариации $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по численному моделированию уравнений движения (3) при μ1=0.01, μ3=0.04 и. u_1=1.323

Численное решение дифференциальных уравнений движения ротора (3.3) при учете (3.15) - (3.17) в виде Simulink модели приведено на рисунке 3.16. В модель входят блок Numerical и блок динамического момента M(phi') (см. рисунок 3.17). Структура блока Numerical показана на рисунке 3.18, в ее содержании производиться интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.3). В структуре блока Numerical имеются подблоки alpha'', beta'' и phi'' для вычислительной операции правых частей дифференциальных уравнений (3.3). Их содержание приведено на рисунках 3.19, 3.20 и 3.21.

Блок M(phi') с его содержанием показан на рисунке 3.22, где вычисляется динамический момент двигателя M(φ’) = L(φ’)-q φ’. Этот блок содержит и подблок a^2 для вычислительной операции значений a^2 по формуле (3.16).

Структура подблока a^2 отражена на рисунке 3.23. В свою очередь подблок a^2 имеет подблоки a0, b0 и c0, которые предназначены для осуществления вычислительной операции коэффициентов a0, b0 и c0. Их содержание показано на Рисунках 3.24, 3.25 и 3.26, соответственно.

Программное обеспечение для воспроизведения метода приведено в [49] и осуществляется пакетом MathLab-Simulink (R2021a (9.10.0.1602886) 64-bit (win 61) 17 February 2021).

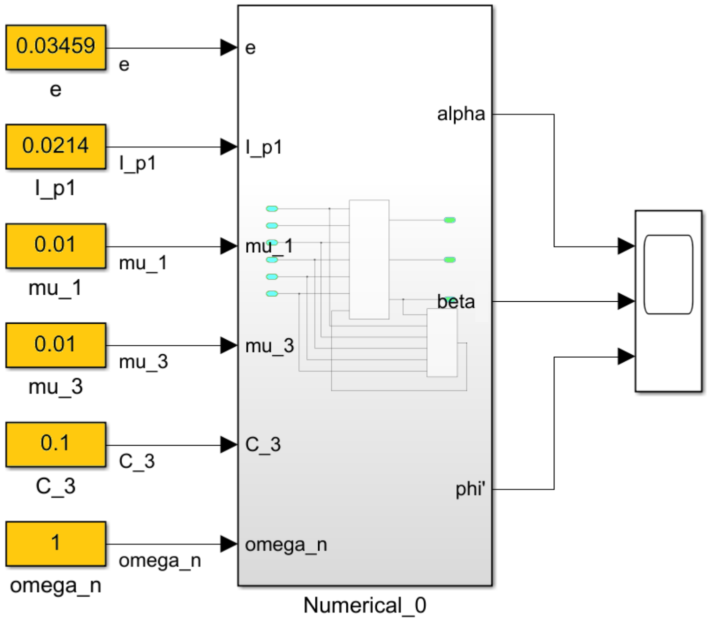


Рисунок 3.16 - Прямое моделирование дифференциальных уравнений движения (3.3)

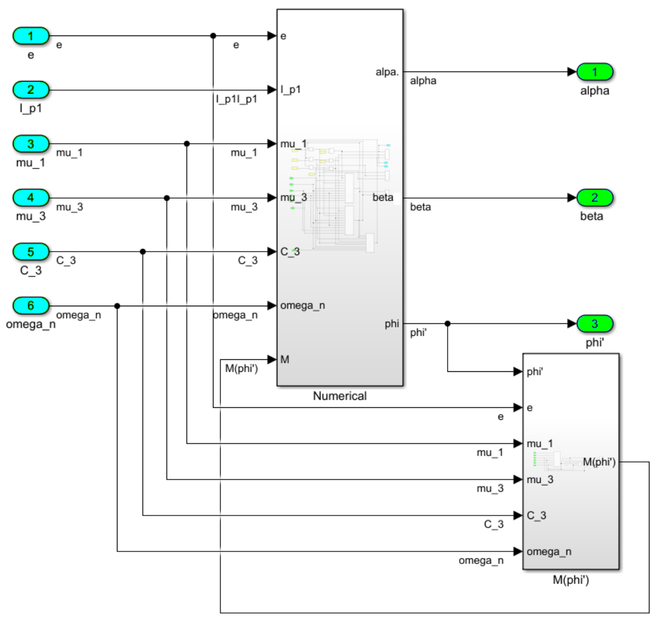


Рисунок 3.17 - Связь блока Numerical с блоком динамического момента двигателя M(phi')

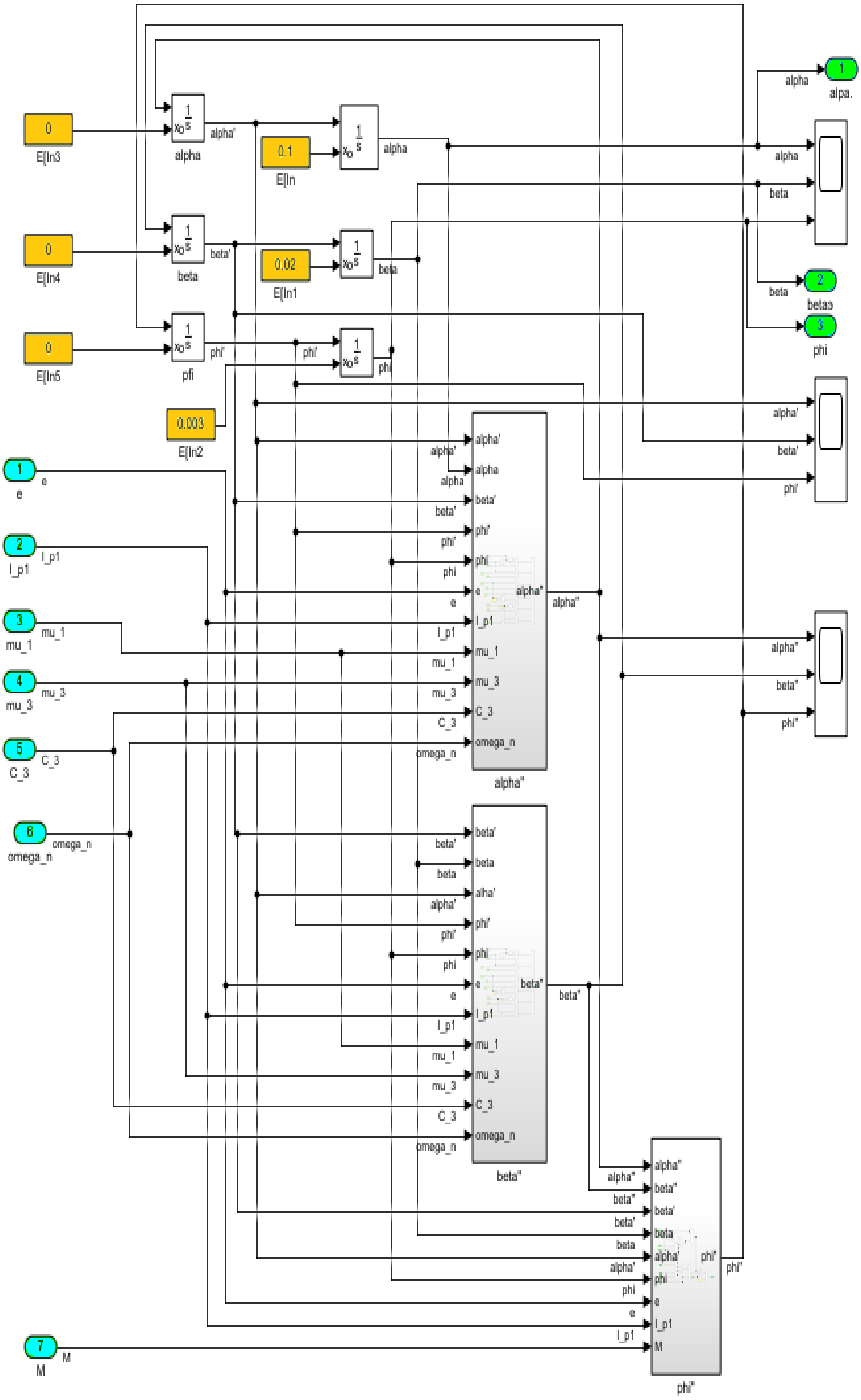


Рисунок 3.18 - Структурное содержание блока Numerical

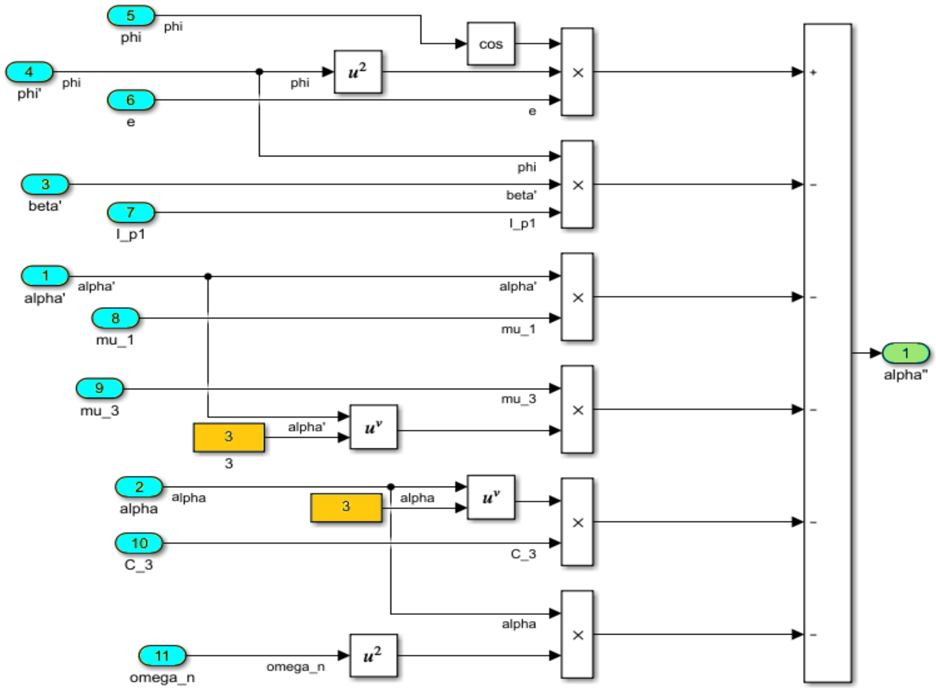


Рисунок 3.19 - Подблок с содержанием для вычислительной операции правой части первого уравнения системы (3.3).

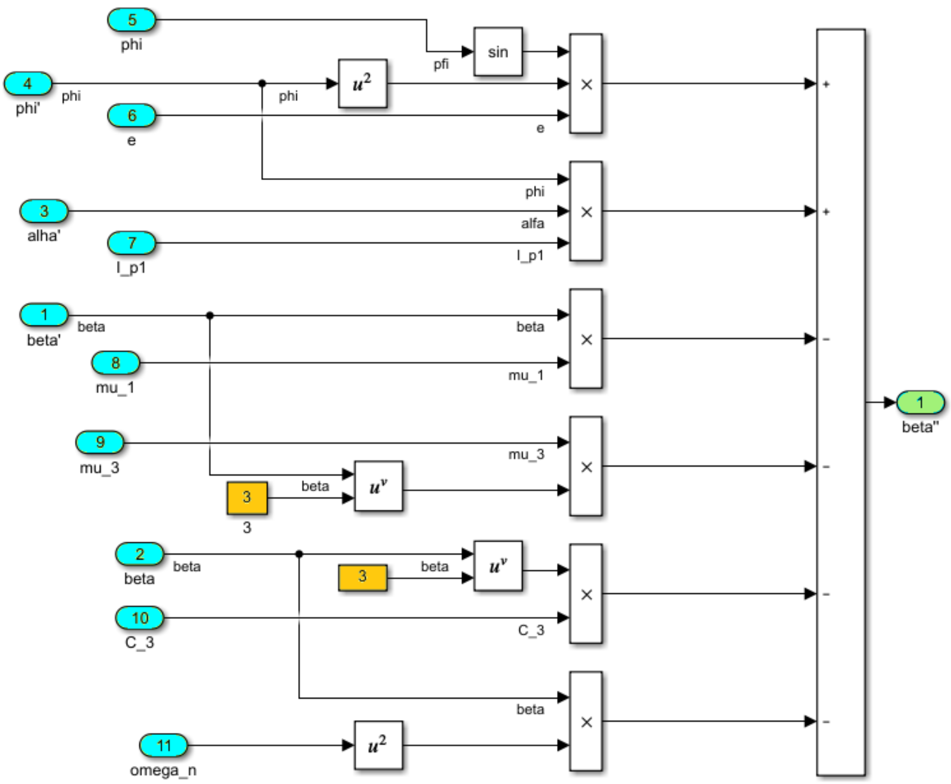


Рисунок 3.20 - Подблок с содержанием для вычислительной операции правой части второго уравнения системы (3.3)

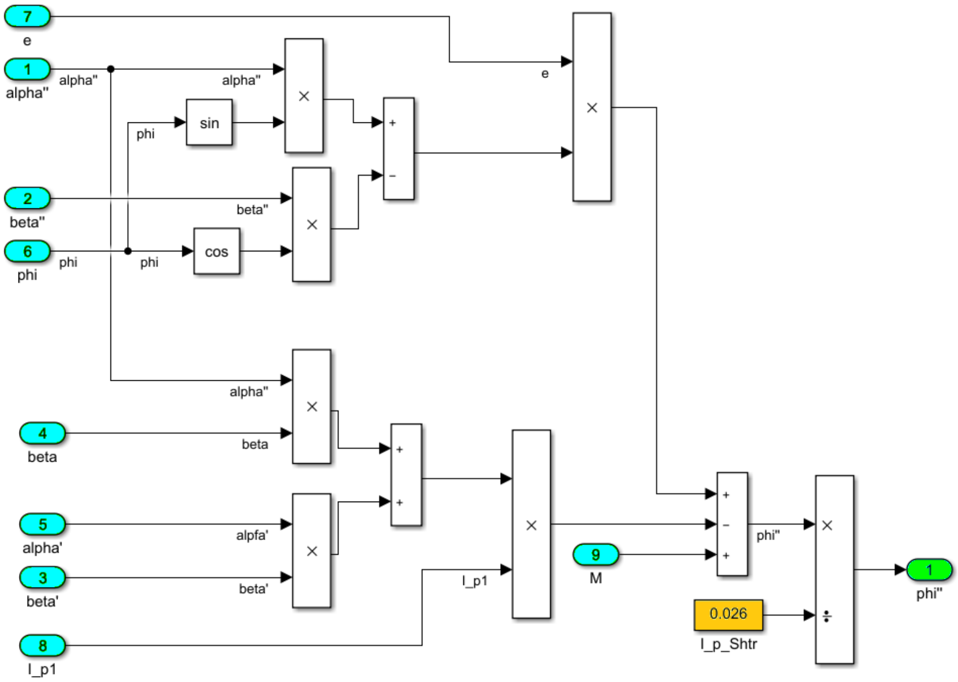


Рисунок 3.21 - Подблок с содержанием для вычислительной операции правой части третьего уравнения системы (3)

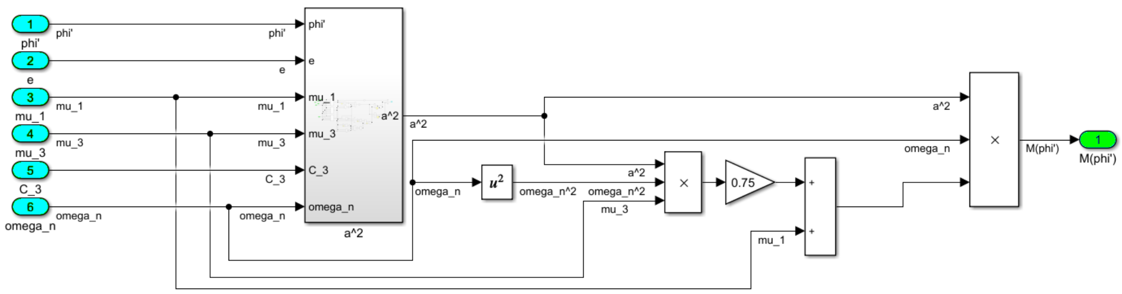


Рисунок 3.22 - Структурное содержание блока M(phi')

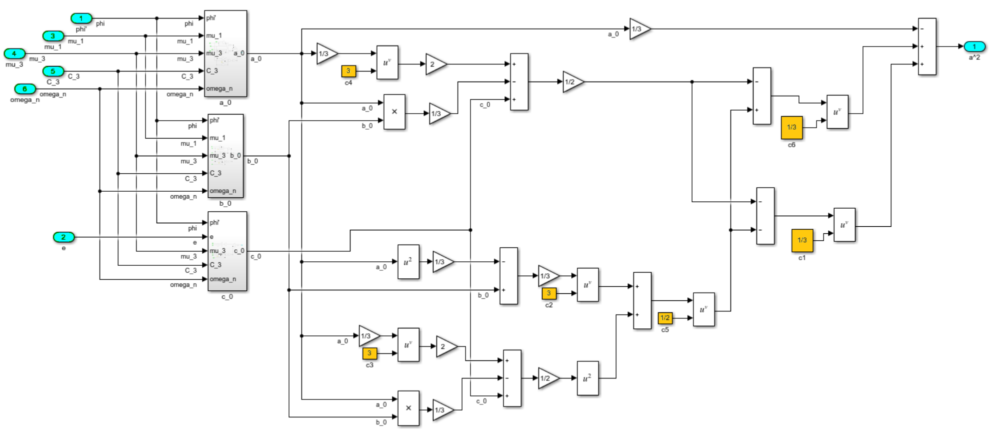


Рисунок 3.23 – Структурное содержание подблока a^2

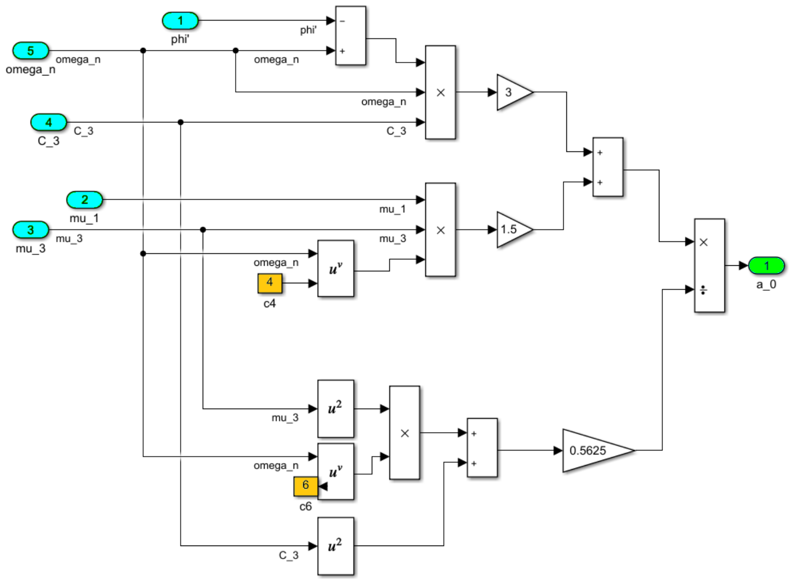


Рисунок 3.24 - Структурное содержание подблока a0

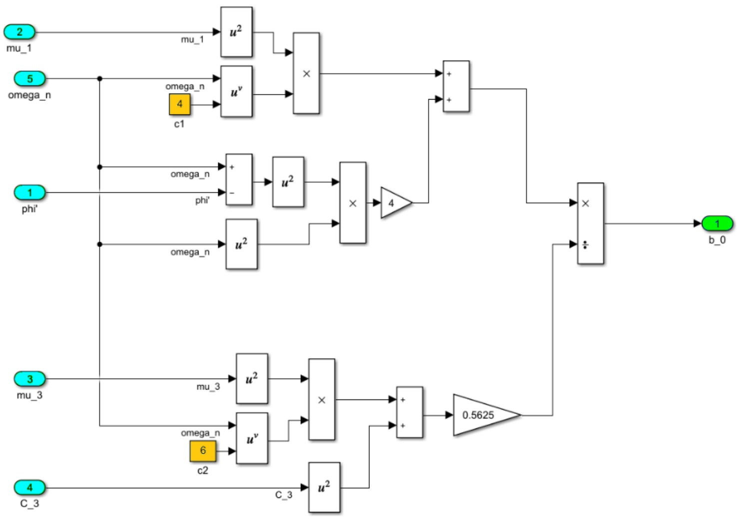


Рисунок 3.25 - Структурное содержание подблока b0

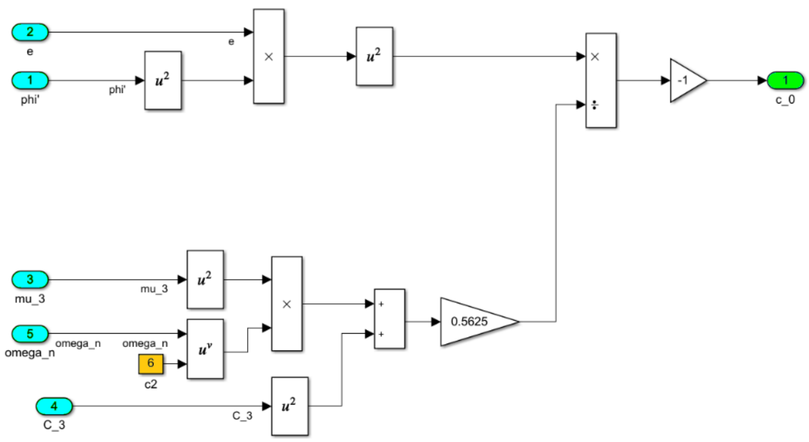


Рисунок 3.26 - Структурное содержание подблока c0

Результаты аналитического моделирования по уравнениям (3.10) с учетом значений амплитуды a и начальной фазы ξ из выражений амплитудно- и фазово-частотных зависимостей главной гармоники [4, с. 37-42], прямого моделирования по уравнениям (3.3) и (3.7) – (3.9) в сравнительной форме представлены на рисунках 3.27–3.32. Сравнительный анализ фазовых диаграмм $\alpha' = \alpha'(\alpha), \beta' = \beta'(\beta)$ при μ_3=0.01 и μ_1=0.01 и осциллограмм $\varphi = \varphi(\bar{t}), \varphi' = \varphi'(\bar{t})$ при μ_3=0.01, 0.04 и μ_1=0.01, построенных по численным результатам с аналогичными диаграммами и осциллограммами, построенными по аналитическим формулам зависимостей $\alpha' = \alpha'(\alpha), \beta' = \beta'(\beta)$ и $\varphi = \varphi(\bar{t})$, $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$и частотной характеристике (рисунки 3.27, 3.29, 3.31–3.34) показывает, что результаты аналитических и численных решений уравнений движения близки друг к другу, что доказывает приемлемость представленного метода численного решения по угловым координатам и их производным. Медленное с течением времени скручивание во внутрь фазовых траекторий численных решений (рисунок 3.27 и 3.29) и постепенное удаление их от аналогичных траекторий аналитических решений показывают сходимость названных решений уравнений (3.3) только начальном этапе времени. Из графиков зависимостей $\alpha' = \alpha'(\alpha)$ и $\beta' = \beta'(\beta)$ на рисунках 3.28 и 3.30, соответственно, построенных по численным решениям уравнений (3.3) при различных значениях μ_3=0.01, 0.02, 0.04 и постоянном значении μ_1=0.01 хорошо заметен совместный демпфирующий эффект величин μ_3 и μ_1 в области резонанса, что подтверждает результатов аналитических решений уравнений движения (3.3) [4, с. 37-42]. При значении μ_3=0.04 расхождение осциллограмм $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенных по аналитическим и численным решениям более заметен на второй половине промежутка времени, чем при значении μ_3=0.01, что означает снижение сходимости этих решений при увеличении значения μ_3.

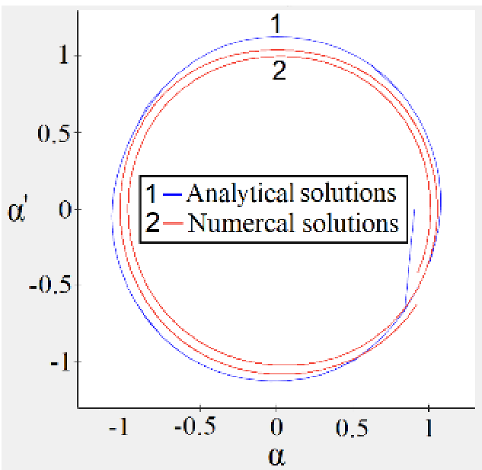


Рисунок 3.27 - Диаграммы $\alpha' = \alpha'(\alpha)$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.01 и μ_1=0.01

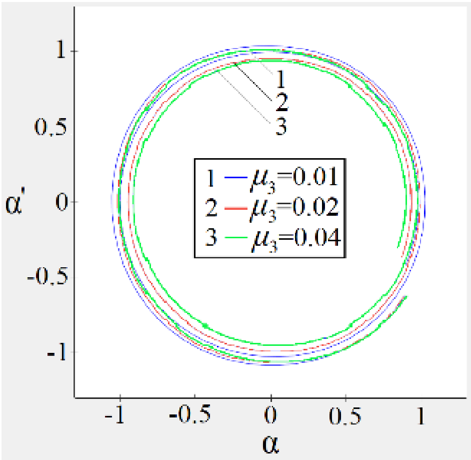


Рисунок 3.28 - Диаграммы $\alpha' = \alpha'(\alpha)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при различных значениях μ_3 и μ_1=0.01

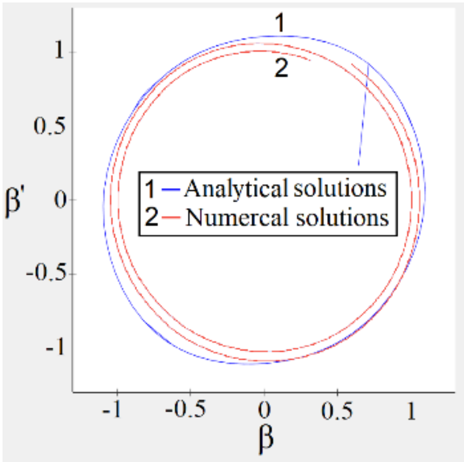


Рисунок 3.29 - Диаграммы $\beta' = \beta'(\beta)$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.01 и μ_1=0.01

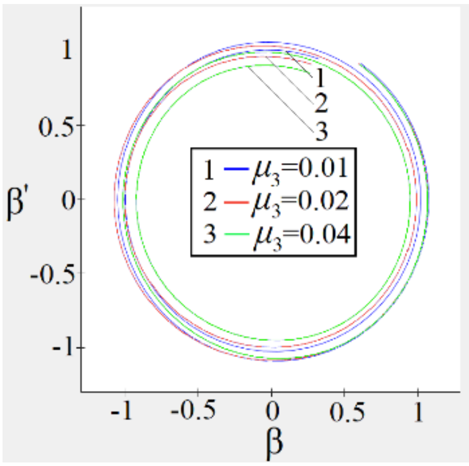


Рисунок 3.30 - Диаграммы $\beta' = \beta'(\beta)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при различных значениях μ_3 и μ_1=0.01

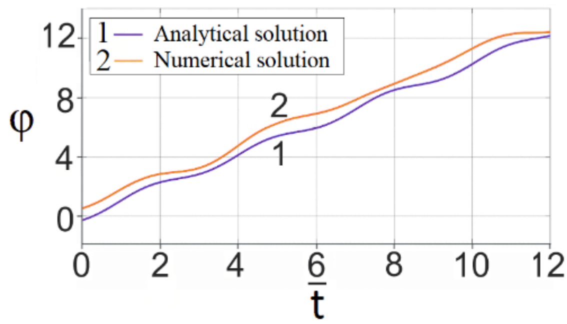


Рисунок 3.31 - Осциллограммы $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.01 и μ_1=0.01

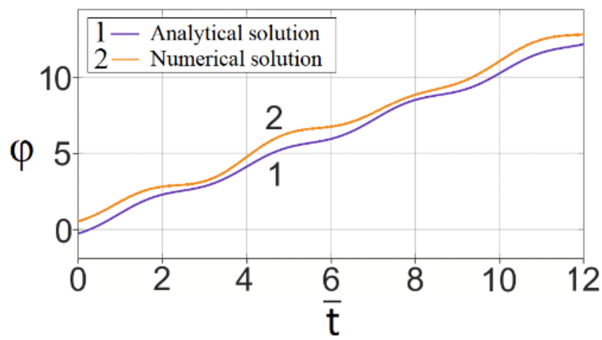


Рисунок 3.32 - Осциллограммы $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.04 и μ_1=0.01

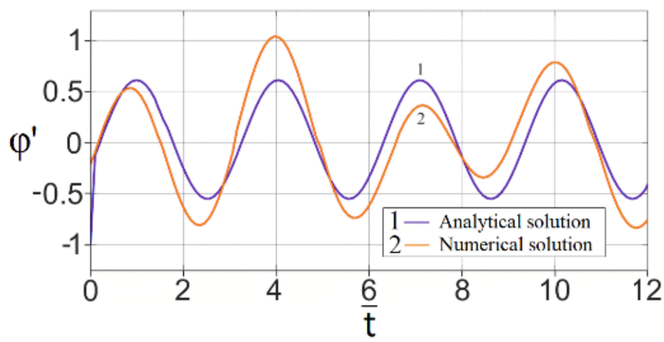


Рисунок 3.33 - Осциллограммы $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.01 и μ_1=0.01

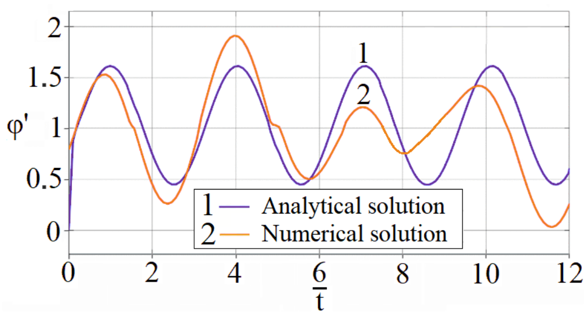


Рисунок 3.34 - Осциллограммы $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по аналитическим и численным решениям уравнений (3.3) при μ_3=0.04 и μ_1=0.01

Теперь численно разрешим систему дифференциальных уравнений движения (3.3) ротора с известным выражением динамического момента двигателя постоянного тока: $M(\varphi') = u_1 - u_2\varphi', u_2 = 1.245$. Полученные результаты сопоставим с результатами непосредственного моделирования системы уравнений (3.3) при представленной общей форме динамического момента двигателя: $M = L(\varphi') - q\varphi'$ (см. рисунки 3.35-3.42). Из рисунков 3.35–3.38, 3.40 хорошо замечена близость результатов прямого моделирования системы уравнений (3.3) при $M(\varphi') = u_1 - u_2\varphi'$ и при $M = L(\varphi') - q\varphi'$ на начальном этапе времени. Расходимость этих результатов в осциллограммах $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$ (см. рисунок 3.41 и рисунок 3.42) объясняется с заранее заданной прямолинейной характеристикой электродвигателя (3.18). Таким образом, приближенность и ограниченность предложенного метода подтвердились ростом различия результатов аналитического и численного решений уравнений движения, результатов прямого моделирования уравнений движения при представленной общей и известной форме динамического момента двигателя, с течением времени и увеличением значения μ_3.

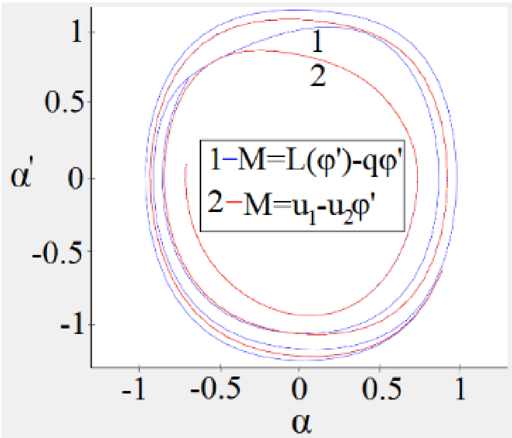


Рисунок 3.35 - Диаграммы $\alpha' = \alpha'(\alpha)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01 и при μ_3=0.01 и u_1=1.304

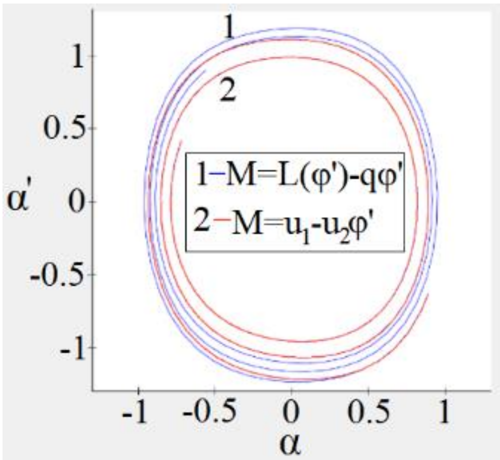


Рисунок 3.36 - Диаграммы $\alpha' = \alpha'(\alpha)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01 и при μ_3=0.04 и u_1=1.323

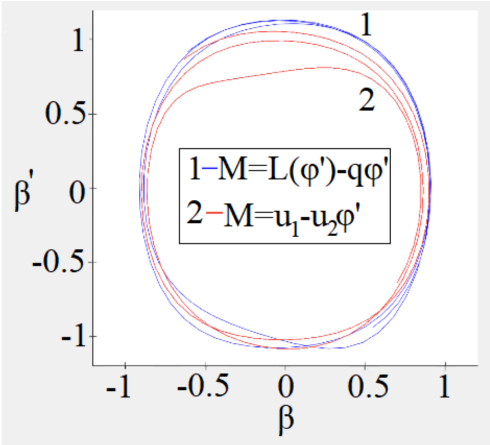


Рисунок 3.37 - Диаграммы $\beta' = \beta'(\beta)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01 и при μ_3=0.01 и u_1=1.304

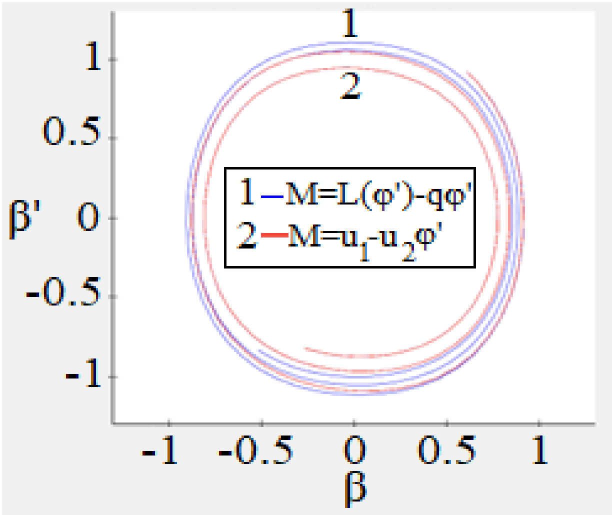


Рисунок 3.38 - Диаграммы $\beta' = \beta'(\beta)$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01 и при μ_3=0.04 и u_1=1.323

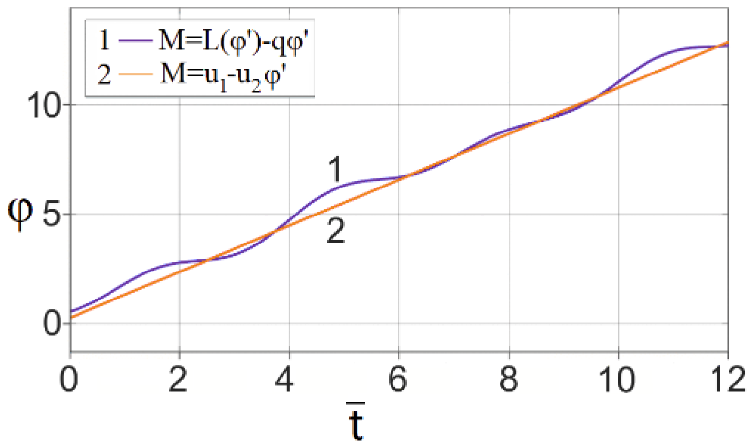


Рисунок 3.39 - Осциллограммы $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01, μ_3=0.01 и. u_1=1.304

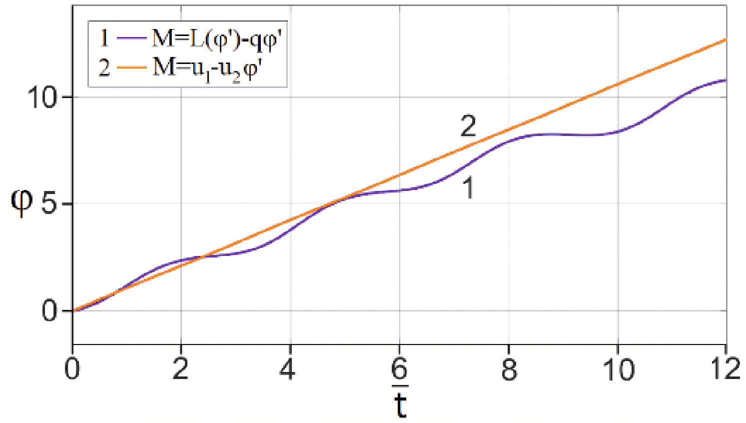


Рисунок 3.40 - Осциллограммы $\varphi = \varphi(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01, μ_3=0.04 и. u_1=1.323

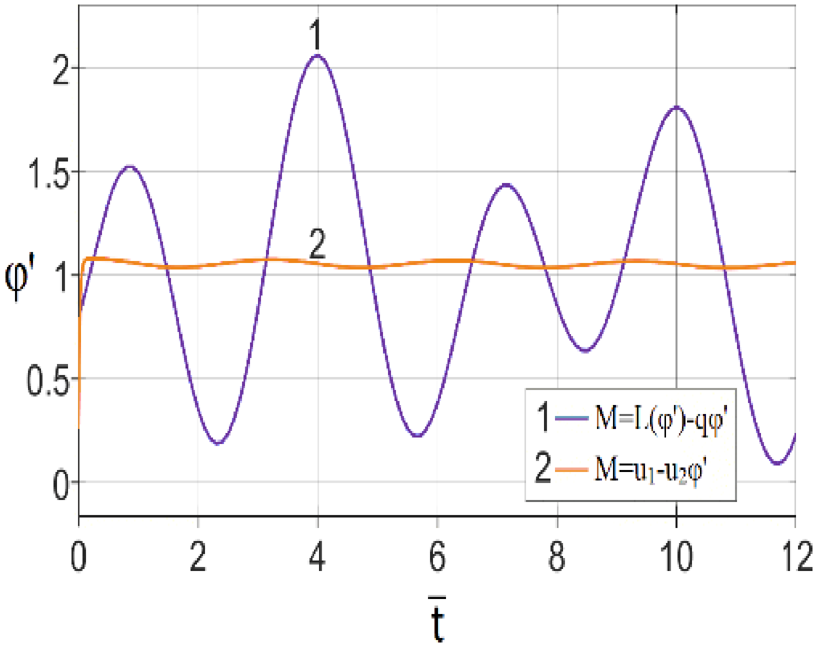


Рисунок 3.41 - Осциллограммы $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01, μ_3=0.01 и. u_1=1.304

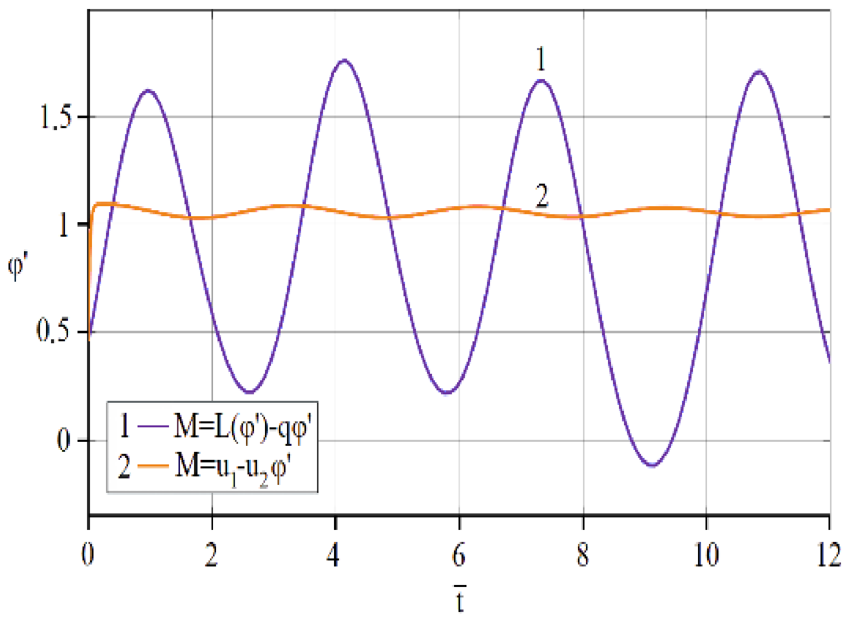
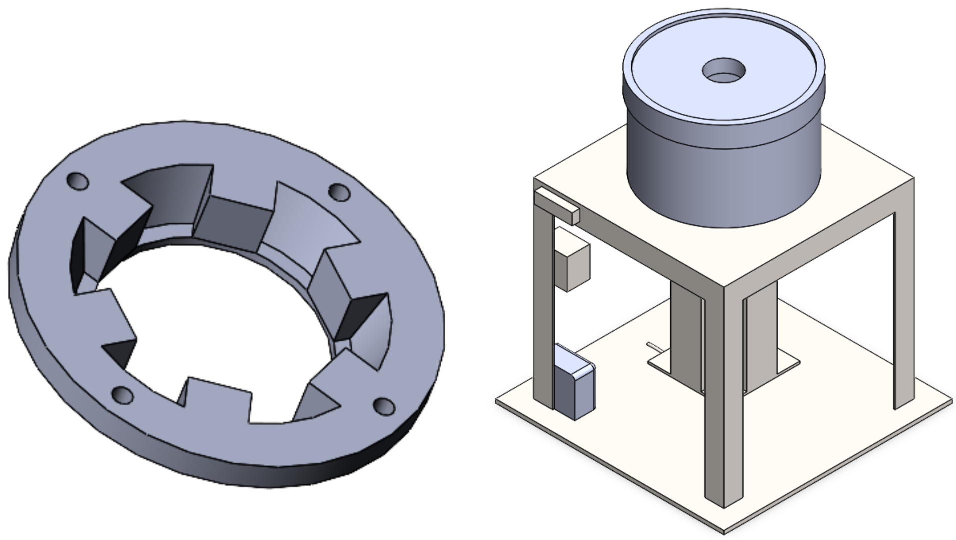


Рисунок 3.42 - Осциллограммы $\varphi' = \varphi'(\bar{t})$, построенные по численным решениям уравнений (3.3) при μ_1=0.01, μ_3=0.04 и. u_1=1.323

4 РАЗРАБОТКА ОПЫТНОГО ОБР0АЗЦА ЦЕНТРИФУГИ НА БАЗЕ ЖЕСТКОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО РОТОРА

4.1 3D модель центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора

Измерив параметры линейных и нелинейных характеристик резиновой прямоугольной пластины по предлагаемой методологии, можно подобрать резиновые пластины для опоры с необходимыми геометрическими, нелинейными упругими, демпфирующими характеристиками. Это наталкивает на мысль о том, что на основании результатов выше проведенных исследований и патентного поиска можно предложить 3D модели (рисунок 4.1) и конструкции (рисунок 4.2) упругой опоры и центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора. Здесь учтены и результаты экспериментальных исследований работы [10, с. 535-543] по подтверждению линейного и нелинейного демпфирующих свойств резинового материала опоры. 3D моделирование осуществилось в среде Solide Works. Основное отличие центрифуги от предложенной в работе [39, с. 333-337] ее модели в улучшенной конструкции упругой опоры.



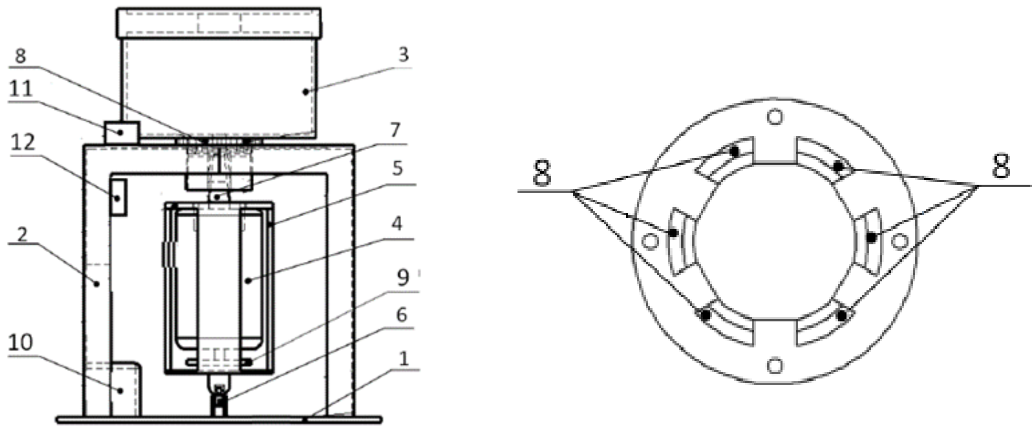
a b

a – упругой опоры, b – центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора.

Рисунок 4.1 - 3D модели

Если в работе [39, с. 333-337] в качестве демпфирующего материала была использована целая гофрированная резина вокруг вала, то в конструкции на рисунок 4.1 для этой цели используются резиновые пластины с формой прямоугольного параллелепипеда, установленные в шести пазах опорной конструкции, прилегающие к муфте. Вал свободно вращается на подшипнике, расположенном в муфте. Это обеспечивает простоту конструкции, легко сменяемость аналогичными материалами с другими упругими и демпфирующими характеристиками, управление числом и расположением резиновых пластин.

Другими отличиями являются замена электромагнитных датчиков перемещения и скорости вращения с более точными лазерными датчиками и использование компьютера для управления и измерения необходимых параметров.



a b

Рисунок 4.2 - Конструкционные схемы центрифуги на базе жесткого гироскопического ротора (a) и упругой опоры (b)

На рисунок 4.2 центрифуга состоит из платформы 1, корпуса 2, цилиндрического контейнера 3, приводного электродвигателя 4, размещенного внутри цилиндрического кожуха 5 жестко. Цилиндрический кожух 5 связан с платформой 1 с помощью карданного шарнира 6. Вал 7 электродвигателя 4 связан с корпусом 2 с помощью подшипника (на рисунке 4.2 не показан) и упругих демпфирующих вкладок 8. Упругие демпфирующие вкладки 8 изготавливаются из специального сорта резины или каучука и плотно устанавливаются по сторонам правильного шестигранника (рисунок 4.2b). На нижней части электродвигателя 4 прикреплен энкодер 9 для обратной связи с блоком управления 10. Для контроля характеристик движения ротора на корпусе 2 установлен датчик вибрации 11, а для измерения скорости вращения вала 7 применен лазерный датчик числа оборотов 12.

Устройство может работать в области до критической скорости (малооборотный режим) и за критической скоростью области (высокоскоростной режим). Скорость вращения ротора регулируется с изменением напряжения источника тока. При этом резиновые вкладки 8 подбираются с таким расчетом, что демпфирование специально изготовленного резинового или каучукового материала помогло избежать прыжкового эффекта в резонансной кривой, возникающего в результате действия нелинейной составляющей упругой силы. Это в свою очередь предоставляет возможность ротору безопасно проходить через критическую скорость в случае определения рабочей скорости за критической частотой вращения.

4.2 Проектно-конструкторская документация (ПКД) опытного образца центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора

Для изготовления опытного образца центрифуги, необходимо разработать проектно-конструкторскую документацию (ПКД). Проектная конструкторская документация (ПКД) – это конструкторские документы, выполненные для проектирования изделия согласно техническому заданию с разработкой рабочей конструкторской документации.

В SolidWorks существует поддержка ГОСТ и все чертежи оформляются по правилам ЕСКД. Благодаря 3-х мерным построениям время на проектирование уменьшается, ошибки могут быть выявлены на стадии проектирования, изготовители теперь могут выводить изделия на рынок быстрее. Инструменты SolidWorks предназначены для создания и проектирования конструкторской документации: для создания 2D и 3D моделей; для динамического моделирования; для расчета деформированно-напряженного состояния узлов и деталей; визуализация деталей и узлов. В SolidWorks имеется набор инструментов для сопряжения постоянного и переменного радиуса. Для лучшего позиционирования, на любом этапе разработки детали можно разворачивать ее, менять масштаб и т.д.

На основе полученной 3D модели центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора при помощи SolidWorks, разработана проектно-конструкторская документация (ПКД) опытного образца. На рисунке 4.3 показан сборочный чертеж опытного центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора, чертежи остальных деталей приведены в Приложении Б.

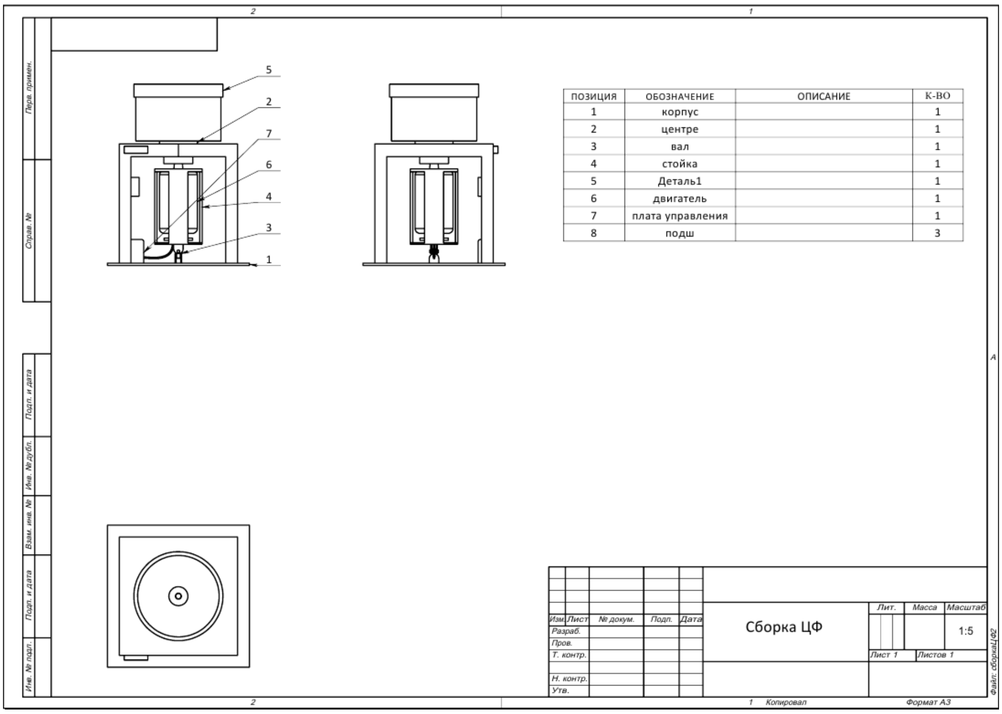


Рисунок 4.3 - Сборочный чертеж опытного образца центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора

4.3 Опытный образец центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора

На основе полученной ПКД изготовлен опытный образец центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора. На рисунке 4.4 показаны центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора. На рисунке 4.5 показаны детали верхней опоры центрифуги. На рисунке 4.5 показаны детали нижней опоры центрифуги. На рисунке показано крепление двигателя установленное между нижней и верхней опорами центрифуги. На рисунке 4.8 показан общий вид центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора.

Рисунок 4.4 – Чаши центрифуги на базе гироскопического жесткого ротора

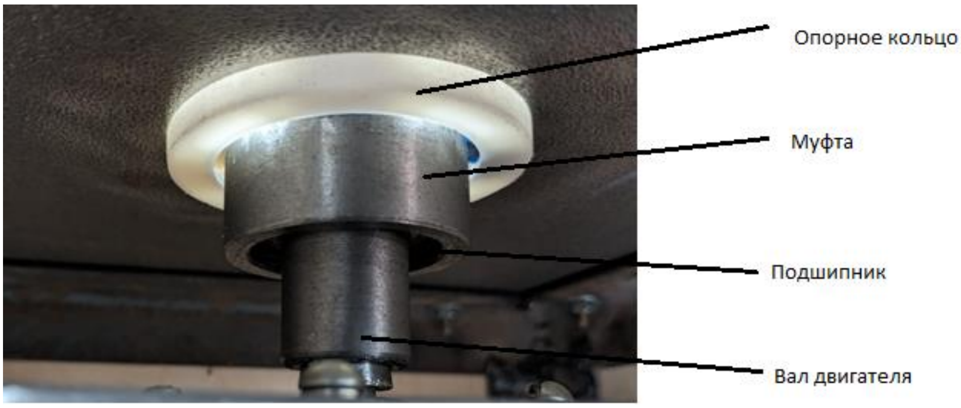


Рисунок 4.5 – Детали верхней опоры центрифуги

Рисунок 4.6 – Детали нижней опоры центрифуги

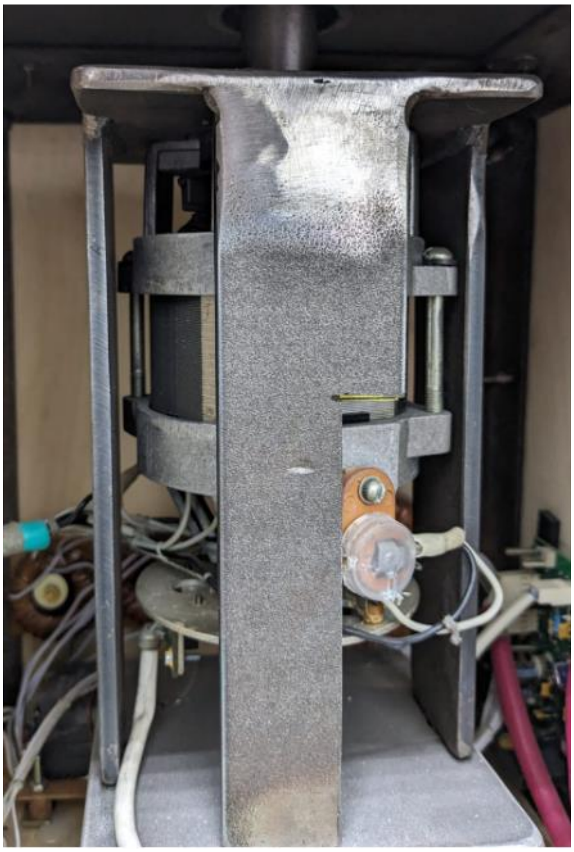


Рисунок 4.7 – Крепление двигателя

Рисунок 4.8 – Общий вид центрифуги на базе вертикального жесткого гироскопического ротора

5 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА ЦЕНТРИФУГИ НА БАЗЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЖЕСТКОГО РОТОРА

5.1 Исследование влияния анизотропии на динамику ротора

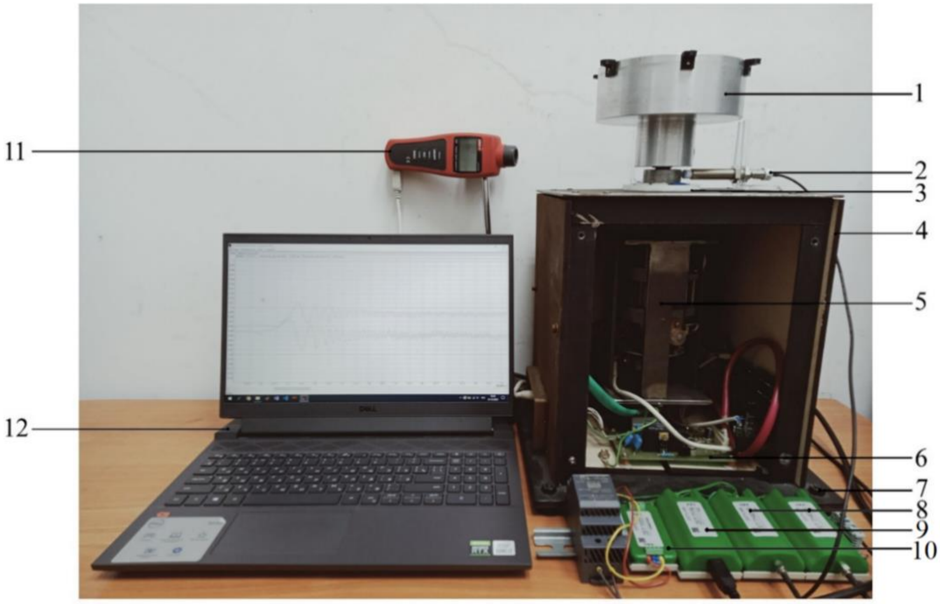
Экспериментальные работы по исследованию влияния анизотропии восстанавливающей и демпфирующей характеристики материала опоры на динамику гироскопического ротора центрифуги проводились на экспериментальной установке, общий вид которой приведен на рисунке 5.1, а схема расположения упругих демпфирующих вкладок показана на рисунке 5.2.

Установка состоит из основных элементов: чаши ротора, вала, приводного электродвигателя, нижней карданной и верхней упругой опоры и корпуса, прикрепленного к платформе. Ротор сделан в виде цилиндрической чаши, чтобы удовлетворить условие $J_T \succ J_P$. Чаша установлена на верхнем конце вала, соединенного с валом ротора двигателя через муфту с подшипником, опирающуюся на упругие демпфирующие вкладки. Упругие демпфирующие вкладки изготавливаются из специального сорта резины (или каучука), вязкоупругого материала и плотно устанавливаются по сторонам правильного шестигранника (рисунок 5.2a) или четырехгранника (восьмигранника) (рисунок 5.2b). Нижний конец вала ротора двигателя, жестко размещенного внутри цилиндрического кожуха, опирается к карданной опоре. На нижней части двигателя прикреплен энкодер для обратной связи со стендом управления.

Для измерения амплитуды поперечного перемещения вала на корпусе установлены пробники ZET 701, которые подключены к вихретоковым датчикам перемещения ZET 7140-s, а те в свою очередь подключены к соединителю измерительных линий ZET 7001-P, далее к преобразователю интерфейса ZET 7174. Преобразователь интерфейса подключается к компьютеру. Для измерения частоты вращения используется тахометр UNI-T UT372.

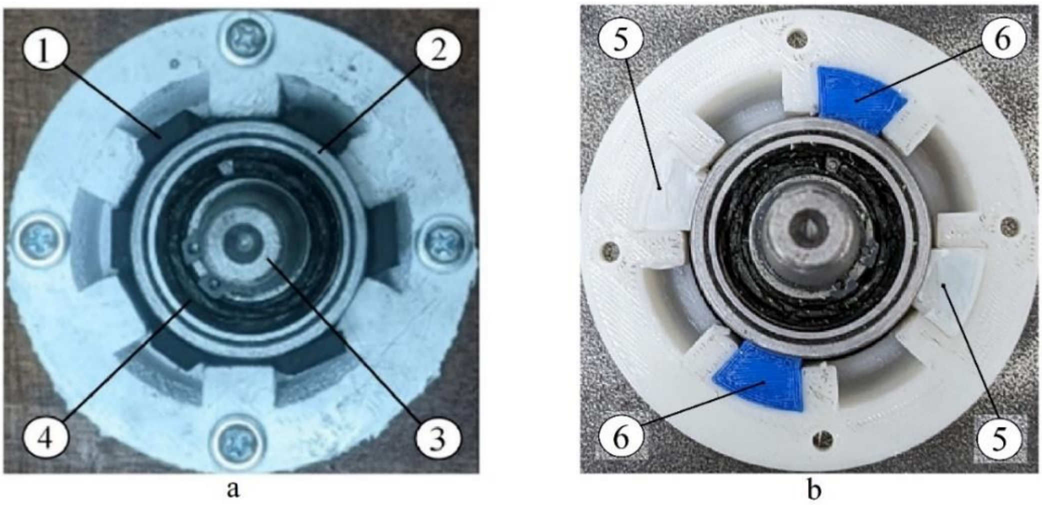
Исследуемый ротор изготовлен в виде цилиндрической чашки, имеющей массу m=1.053 kg, весом G=10.33 N. Расстояние между опорами l0=0.260 m, расстояние от нижней опоры до центра чашки L= 0.360 m. Моменты инерции роторной системы относительно полярной оси $J_P = 0.05kgm^2$, относительно диаметральной оси $J_T = 0.08kgm^2$, эксцентриситет ротора e=1.1*10-3 m. Коэффициенты жесткости опоры: резины марки БМС $c_1 = 25.760\frac{*10^3 N}{m}$ при прямом ходе, $c_1 = 208.500 * 10^3\frac{N}{m}$ при обратном ходе, резины марки ТМКЩ $c_1 = 38.150 * 10^3\frac{N}{m}$ при прямом ходе, $c_1 = 189.400 * 10^3\frac{N}{m}$ при обратном ходе, вязкоупругого материала марки BFLEX $c_{11} = 3.295 * 10^3\frac{N}{m}$, вязкоупругого материала марки HIPS $c_{12} = 306.809\frac{10^3 N}{m}$.

Задействованы программа вихревых датчиков ZetLab и программа тахометра UT372. Результаты экспериментальных работ отражаются в программе ZETLAB. Обработка полученных данных измерений проводиться в программе MatLab.



1 – чаша ротора, 2 – пробники ZET 701, 3 – упругая опора, 4 – корпус, 5 – электродвигатель в кожухе, 6 – стенд управления, 7 – платформа, 8 – вихретоковый датчик перемещения ZET 7140-S, 9 – соединитель измерительных линий, 10 – преобразователь интерфейса ZET 7174, 11 – тахометр UNI-T UT372, 12 – ноутбук.

Рисунок 5.1 - Центрифуга на базе вертикального жесткого гироскопического ротора



1 – резиновая пластина (марки БМС или ТМКЩ), 2 - муфта, 3 – вал ротора, 4 – подшипник; b – четырехгранника: 5 – вязкоупругая вкладка марки HIPS (high impact polystyrene), 6 – вязкоупругая вкладка марки BFLEX.

Рисунок 5.2 - Конструкция упругой опоры a–из шестигранника

5.2 Результаты экспериментальных исследовании

Экспериментальные амплитудно-частотные характеристики гироскопического ротора с упругой опорой шестигранником приведены на рисунках 5.3 и 5.4. Демпфирующие вкладки-пластины изготовлены из резины марки БМС (маслобензостойкая) и резины марки ТМКЩ (тепломорозокислотощелочестойкая).

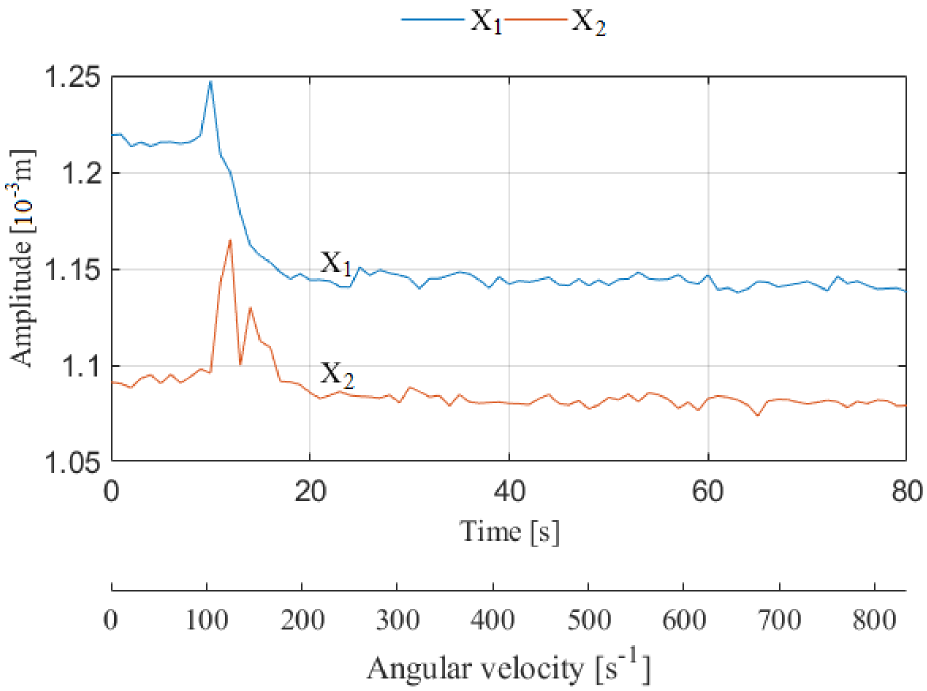
При увеличивающейся с течением времени скорости вращения вала режиме (Рис. 5.3) и смене марки вязкоупругой пластины опоры легко заметить более демпфирующий эффект марки ТМКЩ по сравнению с маркой МБС. Максимальная резонансная амплитуда уменьшается от значения 1.248 mm до 1.168 mm. В после резонансной области 217.8 s-1 – 800 s-1 амплитуда снижается в конце промежутка от значения 1.139 mm до значения 1.080 mm. С учетом результатов работmостается предположить, что подавление амплитуды резонансных и после резонансных колебаний частотной характеристики экспериментального ротора является результатом влияния только нелинейного кубического демпфирования. При прямом ходе ротора его критическая скорость 102.2 s-1 для марки резины БМС, 124.4 s-1 для марки резины ТМКЩ. При обратном ходе критическая скорость ротора 290.9 s-1 для марки резины БМС, 277.3 s-1 для марки резины ТМКЩ. Экспериментальные значения критических скоростей практически совпадают аналитически найденными значениями по формуле (11) из работы [8, с. 1341-1349]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 l_0^2 - mgL}{mL^2 - (J_p - J_T)}}.$$

Различие значений критической скорости ротора при прямом и обратном ходах объясняется как в асимметрией жесткости материала опоры и гибкости вала. В до резонансной области обратного хода 800 s-1 – 386.4 s-1 амплитуда колебаний снижается от значения 1.139 mm до значения 1.080 mm, как при прямом ходе в до резонансной области, а максимальная резонансная амплитуда от значения 1.232 mm до значения 1.145 mm. Амплитуда колебаний при критических скоростях обратного хода ниже, чем при прямом ходе. При обратном ходе в резонансной области наблюдаются прыжки, которые свидетельствуют существование нелинейной составляющей упругости материала опоры с жесткой характеристикой. Сравнение резонансных кривых на рисунках 5.3 и 5.4 доказывает асимметрию нелинейной жесткости в противоположных направлениях.

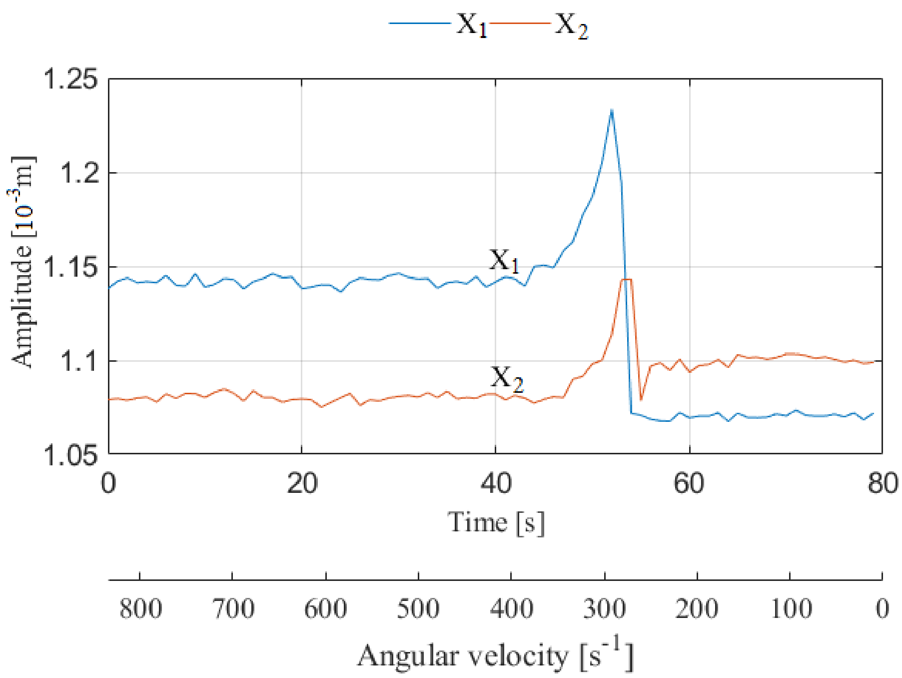
На рисунке 5.5 приведены экспериментальная резонансная кривая и аналитически построенная амплитудно-частотная характеристика ротора при прямом ходе для марки резины ТМКЩ упругой опоры. Аналитическая резонансная кривая при c3=0 построена по формуле

$$\{\{[mL^2 - (J_P - J_T)]\omega^2 - (c_1 l_0^2 - mgL)\}^2 + (\mu_{d1} + 0.75\mu_{d3}\omega^2 A^2)^2\omega^2\}A^2 - (me\omega^2 L)^2 = 0 \quad (5.1)$$



X1 – из резины марки МБС, X2 – из резины марки ТМКЩ.

Рисунок 5.3 - Экспериментальные резонансные кривые при увеличении скорости вращения гироскопического ротора центрифуги в разных вариантах материала опоры



X1 – из резины марки МБС, X2 – из резины марки ТМКЩ.

Рисунок 5.4 - Экспериментальные резонансные кривые при уменьшении скорости вращения гироскопического ротора центрифуги в разных вариантах материала опоры

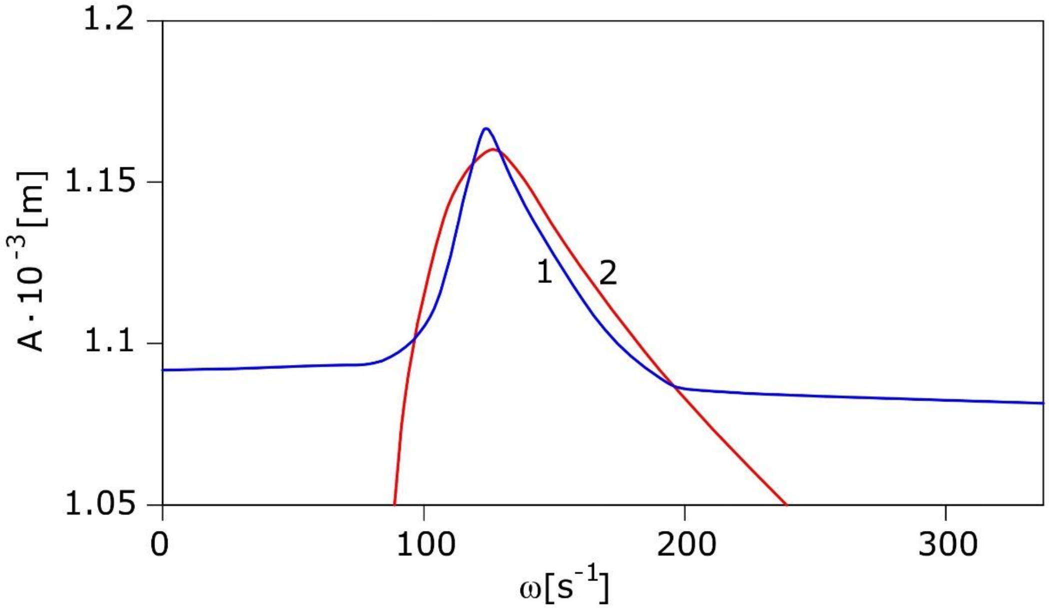


Рисунок 5.5 - Графики экспериментальной АЧХ (1) и аналитической зависимости A=A(ω) (2) при прямом ходе для марки резины ТМКЩ упругой опоры

По точкам пересечения экспериментально и аналитически построенных частотных характеристик приблизительно определены величины линейного демпфирования и нелинейного кубического демпфирования: μd1=22.60 Nms, μd3=1422.9 Nms3.

Из рисунке 5.5 видно хорошее согласие между резонансными кривыми, полученными экспериментальными и аналитическими исследованиями в резонансной области, различия результатов в до и после резонансной областях составляют порядка десятой доли миллиметра. Модели и точные значения линейного и нелинейного демпфирования обычно определяются в результате их идентификацией, которая является отдельной темой исследования.

Анизотропия жесткости и демпфирования в двух взаимно перпендикулярных направлениях создавалась расположением в горизонтальных ячейках четырехгранника (восьмигранника) ударопрочного полистирола HIPS, в вертикальных ячейках гибкий мягкий материал BFLEX. Экспериментальные амплитудно-частотные характеристики для направлений x(α) и y(β) представлены на рисунке 5.6. Первая критическая скорость 31.8 s-1, вторая критическая скорость ~318.2 s-1. Для первой критической скорости направление x(α) является главной, а для второй критической скорости направление y(β) является главным. Следовательно, амплитуда колебаний направления x(α) при первой критической скорости больше, чем аналогичная амплитуда при второй критической скорости, амплитуда колебаний направления y(β) при первой критической скорости меньше, чем аналогичная величина при второй критической скорости. Не очень большая разница между максимальными резонансными значениями амплитуды колебаний одного направления объясняется влиянием существенными значениями проекций пассивного гироскопического момента в уравнениях движения. В резонансных областях наблюдаются прыжки, что подтверждает существование нелинейной составляющей жесткости материала опоры. В первой резонансной области прыжки происходят с большой амплитуды и меньшей скорости вращения к меньшей амплитуде и большой скорости вращения, а во второй резонансной области прыжковые переходы осуществляются от меньшей амплитуды и скорости вращения к большой амплитуде и скорости вращения вала. Это доказывает анизотропию нелинейной жесткости материала упругой опоры: если в направлении x(α) нелинейная упругость опоры обладает жесткой характеристикой, то в направлении y(β) она имеет мягкую характеристику. Проявление анизотропии демпфирования, в т.ч. нелинейного кубического в области за критическими скоростями вращения более существеннее, чем в области между критическими скоростями вращения вала.

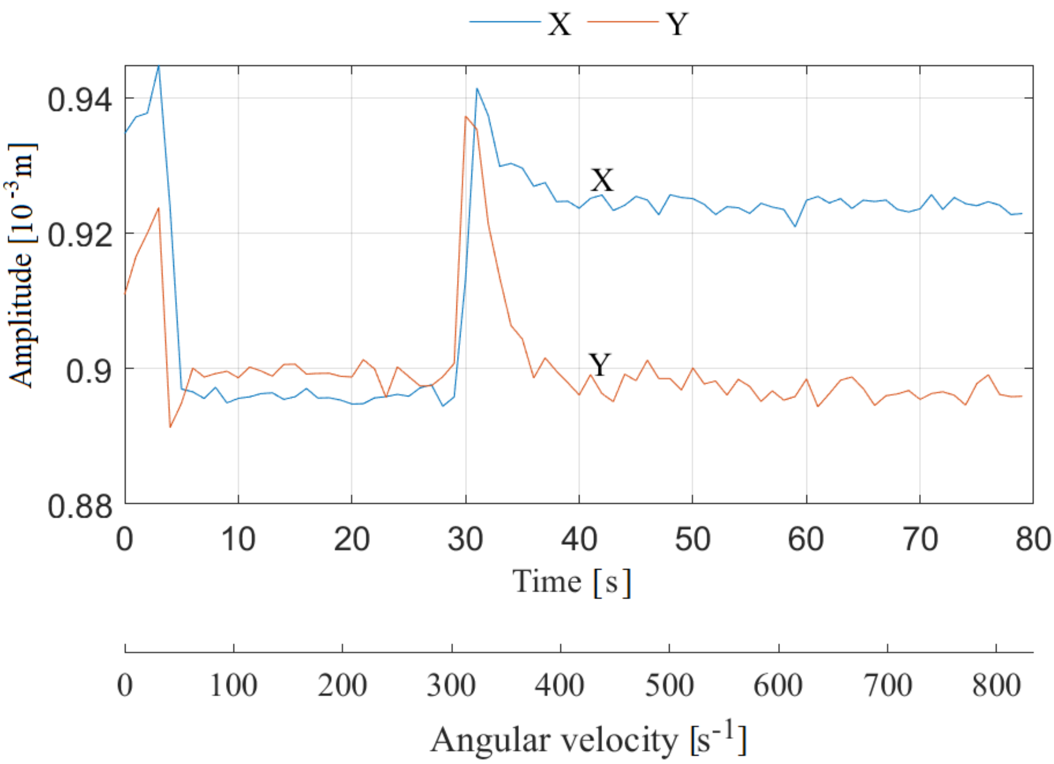


Рисунок 5.6 - Резонансные амплитудно-частотные характеристики при увеличении скорости вращения гироскопического ротора центрифуги и анизотропии упругодемпфирующих свойств материала опоры во взаимно перпендикулярных направлениях: X(α) и Y(β)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Методами аналитического и численного моделирования исследовано совместное влияние линейного и нелинейного кубического демпфирования упругой опоры с нелинейной жесткостью на динамику вертикального жесткого гироскопического ротора.

Показано, что совместное линейное и нелинейное кубическое демпфирование значительно уменьшает амплитуды колебаний, в т.ч. максимальную резонансную, эффективнее влияет на границы области бистабильности – на амплитуды и частоты (скорости вращения вала), соответствующие скачкам, чем линейное демпфирование материала опоры.

По результатам исследований нелинейных эффектов в области бистабильности представлена методология независимого определения коэффициентов нелинейной жесткости, линейного демпфирования и нелинейного кубического демпфирования материала опоры. При этом предположено, что гироскопическая жесткая роторная система гармонически вынужденным возмущением является слаболинейной, близкой к линейной и совершает малые колебания.

Результаты исследования нелинейных эффектов в области прыжковых эффектов также могут быть полезными при идентификации параметров нелинейной жесткости, линейного демпфирования и нелинейного кубического демпфирования при совместном их содержании в нелинейных свойствах материала опоры и их соотношения для производственной цели.

Доказано, что если линейное демпфирование смещает левую границу области неустойчивости в сторону больших амплитуд и скоростей вращения вала, то нелинейное кубическое демпфирование может ее полностью устранить. При этом критерий устойчивости получен методом анализа характеристического уравнения в форме Якоби и результатов исследований области особых точек.

Рассмотрены резонансные переходы и влияние нелинейной жесткости, нелинейного кубического демпфирования материала опоры на частотные характеристики нестационарного процесса благодаря тому, что для изучения отклика роторной системы использовался метод изменяющейся амплитуды (VAM), дополненный понятием “медленного” времени введенный в рассмотрение параметром “медленно” изменяющейся угловой скоростью вращения.

Имеется согласие между результатами аналитических решений и численных решений уравнений движения ротора.

Результаты проведенных исследований могут быть использованы при научных исследованиях и конструкторских расчетах для создания новых виброизоляторов из эластичных материалов с наилучшими параметрами демпфирования для вибрирующих систем, в т.ч. гироскопической роторной машины.

2.Построены дифференциальные уравнения движения гироскопического жесткого ротора с учетом анизотропии упругих и демпфирующих свойств материала опоры и решены аналитически методом гармонического баланса, удобного для получения в отдельности частотных характеристик колебаний ортогональных направлений. При получении уравнений нестационарных колебаний использован метод меняющихся амплитуд.

В случае неравномерностей линейной жесткости материала упругой опоры в двух взаимно перпендикулярных направлениях существуют две критические скорости и соответствующие резонансные области.

При каждой критической скорости, площадь резонансной кривой основного направления больше, чем площадь резонансной кривой перпендикулярного направления, обусловленной действием проекцией пассивного гироскопического момента.

В случае наличия нелинейного компонента жесткости материала опоры резонансные кривые главных направлений сопровождаются прыжковыми переходами.

Увеличение кубической нелинейности демпфирования при неизменном линейном компоненте подавляет резонансные амплитуды колебаний каждого из направлений значительнее, чем линейный компонент.

Сравнение аналитического и численного решений уравнений движения ротора показывает хорошее согласие между ними.

Экспериментально исследованы влияния анизотропии упругих и демпфирующих свойств материала упругой опоры на динамику гироскопического ротора центрифуги.

3.В случае неизвестности характеристики источника возбуждения предложен численный методе решения уравнений движения неидеального гироскопического ротора с заменой движущего момента двигателя его выражением, найденным из частотного уравнения вынужденных стационарных колебаний при предположении, что угловое ускорение во много раз меньше квадрата угловой скорости вращения.

Правильность метода подтверждены хорошим согласием результатов численного решения уравнений движения ротора с результатами аналитического решения и нелинейным кубическим демпфированием фазовых диаграмм, а также сравнением с результатами численного моделирования при прямолинейной характеристике двигателя постоянного тока.

Метод используется при первом приближении и слабых нелинейных колебаниях, в резонансной области, где скорость вращения вала порядка собственной частоты колебательной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Zakaria A.A., Rustighi E., Ferguson N.S. A numerical investigation into the effect of the supports on the vibration of rotating shafts, in: Proceedings of the 11-th International Conference on Engineering Vibration, Ljubljana. - Slovenia, 2015. - P. 539-552.

2 Gil-Negrete N., Vinolas J., Kari L. A non-linear rubber material model combining fractional order viscoelasticity and amplitude dependent effects // J. Appl. Mech. – 2009. - №76 (1). – P. 9 – 11. https://doi.org/10.1115/1.2999454.

3 Richards C.M., Singh R. Experimental characterization of non-linear rubber isolators in a multi-degree-of-freedom system configuration // J. Acoust. S. Am. – 1999. - №106. – P. 21 – 78. https://doi.org/10.1121/1.427268.

4 Matsubara M., Teramoto S., Nagatani A., Kawamura S., Tsujiuchi N., Ito A., Kobayashi M., Furuta S. Effect of Fiber Orientation on Nonlinear Damping and Internal Microdeformation in Short-Fiber-Reinforced Natural Rubber, Exp. Techniques. – 2021. - №45(1). – P. 37 – 41. https://doi.org/10.1007/s40799-020-00404-6.

5 Ravindra B., Mallik A.K. Performance of non-linear vibration isolators under harmonic excitation // J. Sound. Vib. – 1994. - №170. – P. 325-337. https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1066.

6 Peng Z.K., Meng Lang Z.Q., Zhang W.M., Chu F.L. Study of the effects of cubic non-linear damping on vibration isolations using Harmonic Balance Method // Int. J. Nonlin. Mech. – 2012. - №47(10). – P. 1065 - 1166. https://doi.org /10.1016/j.ijnonlinmec.2011.09.013.

7 Lang Z.Q., Jing X.J., Billings S.A., Tomilinson G.R., Peng Z.K. Significant effects of nonlinear damping on vibration isolation // J. Sound. Vib. – 2009. - №323. – P. 352-365.

8 Xiao Z. L., Jing X., Cheng L. The transmissibility of vibration isolators with cubic non-linear damping under both force and base excitations // J. Sound. Vib. – 2013.- №332 (5). – P. 1335-1354. http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.11.001.

9 Iskakov Zh. Resonant Oscillations of a Vertical Hard Gyroscopic Rotor with Linear and Non-linear Damping // Advances in Mechanism and Machine Science, Mech. Mach. Sci. – 2019. - №73. – P. 3353–3362. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20131-9_331.

10 Iskakov Zh., Bissembayev K. The nonlinear vibrations of a vertical hard gyroscopic rotor with non-linear characteristics // Mech. Sci.- 2019. - №10. – P. 529–544. https://doi.org/10.5194/ms-10-529-2019.

11 Al-Solihat MK., Behdinan K., Force transmissibility and frequency response of a flexible shaft-disk rotor supported by a nonlinear suspension system // Int. J. Nonlin. Mech. 2020. - №124. - 103501 p. https://doi.org/10.1016 /j.ijnonlinmec.2020.103501.

12 Fujiwara H., Nakaura H., Watanabei K. The vibration behavior of flexibly fixed rotating machines, in: Proceedings of the 14th IFToMM World Congress // Taipei, Taiwan. – 2015. - №4. – P. 517 – 522. https://doi.org/10.6567/ iftomm.14th. wc.os14.023.

13 Li DH., Shaw S.W. The effects of nonlinear damping on degenerate parametric amplification // Nonlinear Dyn. – 2020. - №102(4). – P. 2433-2452. https://doi.org/10.1007/s11071-020-06090-8.

14 Mahdi Mofidian S.M., Bardaweel H. Displacement transmissibility evaluation of vibration isolation system employing nonlinear- damping and nonlinear-stiffness elements // J. Sound. Vib. – 2018. - №24(18). – P. 4247-4259. https://doi.org/10.1177/1077546317722702.

15 Iskakov Zh. Resonant Oscillations of a Vertical Unbalanced Gyroscopic Rotor with Non-linear Characteristics, in: Proceedings of the 14th IFToMM World Congress // Taipei. – 2015. - №3. – P. 505-513. https://doi.org/10.6567/ iftomm.14th.wc .os14.001.

16 Iskakov Zh. Dynamics of a Vertical Unbalanced Gyroscopic Rotor with Non-linear Characteristics, New advances in Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics // Mech. Mach. Sci.- 2017. - №46. – P. 107–114. https://doi.org/10.1007/ 978-3 -319-45450-411.

17 Donmez A., Cigeroglu E., Ozgen G.O. The effect of stiffness and loading deviations in a nonlinear isolator having quasi zero stiffness and geometrically nonlinear damping, in: Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. – 2018. - Vol. 4B UNSP V04BT05A051.

18 Balaji P.S., Karthik K. Selva Applications of Nonlinearity in Passive Vibration Control: A Review // J. Vib. Eng. Technol. – 2021. - №9(2). – P. 183-213. https://doi.org/10.1007/s42417-020-00216-3.

19 Kong X.R., Li H.Q., Wu C. Dynamics of 1-dof and 2-dof energy sink with geometrically nonlinear damping: application to vibration suppression // Nonlinear Dyn. – 2018. - №91(1). – P.733-754. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3906-2.

20 Javad Taghipour, Morteza Dardel, Mohammad Hadi Pashaei, Vibration mitigation of a nonlinear rotor system with linear and nonlinear vibration absorbers, Mech. MT. – 2018. - № 128. – P. 586-615. https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory. 2018.07.001.

21 Le Guisquet S., Amabili M. Identification by means of a genetic algorithm of nonlinear damping and stiffness of continuous structures subjected to large-amplitude vibrations. Part I: single-degree-of-freedom responses // Mech. Syst. Signal Pr. - 2021. - №153. – 107470 p. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107470.

22 Civera M., Grivet-Talocia S., Surace C., Fragonara L.Z. A generalised power-law formulation for the modelling of damping and stiffness nonlinearities // Mech. Syst. Signal Pr. - 2021. - №153. - 107531 p. https://doi.org/10.1016/j.ymssp. 2020.107531.

23 Chatterjee A., Chintha H.P. Identification and parameter estimation of cubic nonlinear damping using harmonic probing and volterra series // Int. J. Nonlin. Mech. - 2020.- №125. – 103518 p. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103518.

24 Chatterjee A., Chintha H.P. Identification and Parameter Estimation of Asymmetric Nonlinear Damping in a Single-Degree-of-Freedom System Using Volterra Series // J. Vib. Eng. Technol. 2021. https://doi.org/10.1007/s42417-020-00266-7.

25 Balasubramanian P., Ferrari G., Amabili M. Identification of the viscoelastic response and nonlinear damping of a rubber plate in nonlinear vibration regime. - Mech. Syst. Signal Pr. – 2018. - №111. – P. 376-398. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.03.061.

26 Amabili M., Balasubramanian P., Ferrari G. Nonlinear vibrations and damping of fractional viscoelastic rectangular plates, Nonlinear Dyn. – 2021. - №103(4). – P. 3581-3609. https://doi.org/10.1007/s11071-020-05892-0.

27 Amabili M. Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments, Nonlinear Dyn.- 2018. - №93(1). - P.5 – 18. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3889-z.

28 Lisitano D., Bonisoli E., Direct identification of nonlinear damping: application to a magnetic damped system // Mech. Syst. Signal Pr. – 2021. – 146 p. 107038. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107038.

29 ZQ. Lu GS. Hu H. Ding, LQ. Chen, Jump-based estimation for nonlinear stiffness and damping parameters // J. Vib. Control. – 2019. - №25(2). – P. 325-335. https://doi.org/10.1177/1077546318777414.

30 Al-hababi T., Cao MS., Saleh B., Alkayem NF., Xu H. A Critical Review of Nonlinear Damping Identification in Structural Dynamics: Methods, Applications, and Challenges. Sensors. - 2020. - №20 (24). – 7303 p. https://doi.org/ 10.3390 /s20247303.

31 Parshakov A.N. Physics of Vibratory Motion, Publishing House of Perm State University. - Perm, 2010.

32 Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Non-linear vibrations, in: Lectures on the theory of vibration and waves, Saratov, 2011.

33 Grobov V.A. Asymptotic methods for calculating bending vibrations of turbomachine shafts, Publ. house of the Academy of Science of the USSR.- M., 1961.

34 Banakh L., Nikiforov A., Non Stationary Oscillations of High-Speed Rotor Systems at Start-Up and Braking, in: Proceedings of the 10th Biennial International Conference on Vibration Problems (ICOVP), Prague, Czech Republic, 2011. - P. 328-333.

35 Kononenko V.O., Vibrating Vibrating systems with limited excitation, Naukova dumka.- Kiev, 1980.

36 Iskakov Zh., Bissembayev K., Jamalov N., Abduraimov A. Modeling the Dynamics of a Gyroscopic Rigid Rotor with Linear and Nonlinear Damping and Nonlinear Stiffness of the Elastic Support, Machines. – 2021. - №9 (11). – 276 p. https://doi.org/10.3390/machines9110276.

37 Iskakov Zh., Bissembayev K., Jamalov N. Resonance Vibrations of a Gyroscopic Rotor with Linear and Nonlinear damping and Nonlinear stiffness of the Elastic support in interaction with a Non-ideal Energy source // Mech. Syst. Signal 2022. - №170. – 108773 p. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108773.

38 Iskakov Zh., Bissembayev K., Jamalov N. Unsteady Resonant Oscillations of a Gyroscopic Rigid Rotor with Non-linear Damping and Non-linear Rigidity of the Elastic Support // Mech. Mach. Sci. – 2022. - №85. – P. 83–93. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83594-1_9.

39 Iskakov Zh., Jamalov N., Abduraimov A. Resonant Oscillations of a Nonideal Gyroscopic Rotor System with Nonlinear Restoring and Damping Characteristics // MMS. – 2023. - №124. – P. 329–338. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29815-8_32.

40 Iskakov Zh., Bissembayev K., Jamalov N., Kamal A. Dynamic modeling of a non-ideal gyroscopic rotor system with nonlinear damping and nonlinear rigidity of an elastic support // Adv. Mech. Eng. – 2022. - №14(7).- P. 1–31. https://doi.org/10.1177/16878132221108675.

41 Iskakov Z., Jamalov N., Abduraimov A. Nonstationary Resonant Oscillations of a Gyro-scopic Rigid Rotor with Nonlinear Damping and Non-ideal Energy Source. In: Van, K.N., Quang, H.N., Ceccarelli, M. (eds.) IFToMM Asian MMS 2022: Advances in Asian Mechanism and Machine Science // Mechanisms and Machine Science. – 2022. - Vol. 113. - P. 755–763. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7_72.

42 Iskakov Z., Jamalov N., Abduraimov A. Non-stationary Resonance Transition of the Gyroscopic Rigid Rotor with Nonlinear Damping and Non-ideal Energy Source. In: Vincenzo, N., Gasparetto, A., Quaglia, G. (eds.) IFToMM Italy 2022: Advances in Italian Mechanism Science // Mechanisms and Machine Science. – 2022. – Vol. 122. - P. 114–122. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10776-4_14.

43 Bisoi S.K. Bharti A.K. Samantaray, and R. Bhattacharyya, Sommerfeld Effect Characterization in Anisotropic Non-ideal Rotor System, in book: Advances in Rotor Dynamics, Control, and Structural Health Monitoring, Lecture Notes in Mechanical Engineering, S. Dutta et al. (eds.) // Springer Nature Singapore Pte Ltd. - 2020. - P.51-61. https://doi.org/10.1007/978-981-15-5693-7_4.

44 Amabili M. Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations Nonlinear Dyn. – 2019. - №97(3). – P. 1785-1797. https://doi.org/10.1007/s11071-018-4312-0.

45 Amabili M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: derivation from viscoelasticity and experimental validation // J. Mech. Phys. Solids. – 2018. - №118. – P. 275-292. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.004.

46 Ho C., Lang Z., Billings S.A. The benefits of non-linear cubic viscous damping on the force transmissibility of a Duffing-type vibration isolator, in: Proceedings of UKACC International Conference on Control, UK. - Cardiff, 3-5 September. - 2012. - P. 479-484.

47 Awrejcewicz J, Krysko VA. Introduction to Asymptotic Methods, Boca Raton Fla, by Chapman and Hall // CRC Press, 2006. – 242 p. https://lib.ugent.be/catalog/rug01:001020130.

48 Bharti S.K., Bisoi A., Sinha A., Samantaray A.K. Sommerfeld effect at forward and backward critical speeds in a rigid rotor shaft system with anisotropic supports // J. Sound. Vib. – 2019. - №442. – P. 330-349. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.11.002.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Программы в интегрированной среде MATLAB

Программа в среде Matlab для расчёта уравнения

```
close all;clear all;clc;
syms a b xi zeta u1
name="V2_1";
c=1;
dataset = xlsread('intcond.xlsx');
ccc1=dataset(:,1);
ccc2=dataset(:,2);
uuu11=dataset(:,3);
uuu12=dataset(:,4);
uuu31=dataset(:,5);
uuu32=dataset(:,6);
C31=ccc1(c);
C32=ccc2(c);
u11=uuu11(c);
u12=uuu12(c);
u31=uuu31(c);
u32=uuu32(c);
wn1=1;
wn2=1.1;
jp1=0.021;
u2=1.245;
er=0.0346;
W=0:0.001:1.4;
va=[];
vb=[];
vx=[];
vz=[];
vu=[];
vw=[];
parfor ii=701:1401
eq1=er*W(ii)^2*sin(xi)-jp1*W(ii)*b*wn2*sin(xi-
zeta)+u11*wn1*a+(3/4)*u31*(wn1*a)^3==0;
eq2=wn1-W(ii)-(1/(2*wn1*a))*(er*W(ii)^2*cos(xi)-jp1*W(ii)*b*wn2*cos(xi-zeta)-
(3/4)*C31*a^3)==0;
eq3=er*W(ii)^2*sin(zeta)+jp1*W(ii)*a*wn1*sin(xi-
zeta)+u12*wn2*b+(3/4)*u32*(wn2*b)^3==0;
eq4=wn2-W(ii)-(1/(2*wn2*b))*(er*W(ii)^2*cos(zeta)-jp1*W(ii)*a*wn1*cos(xi-zeta)-
(3/4)*C32*b^3)==0;

eq5=u1-u2*W(ii)-(1/2)*(u11*wn1*a^2+u12*wn2*b^2)-
(3/8)*(u31*wn1^3*a^4+u32*wn2^3*b^4)==0;

sol=vpasolve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5],[a,b,xi,zeta,u1],[0.001  Inf;0.001  Inf;0.001
Inf;0.001  Inf;0.001  Inf]);
if sol.a
va=[va;sol.a];
vb=[vb;sol.b];
vx=[vx;sol.xi];
vz=[vz;sol.zeta];
vu=[vu;sol.u1];
vw=[vw;W(ii)];
display(sol);
end
end
xlswrite(name,vw,'Лист1','A1');
xlswrite(name,double(va),'Лист1','B1');
```

```
xlswrite(name,double(vb),'Лист1','C1');
xlswrite(name,double(vx),'Лист1','D1');
xlswrite(name,double(vz),'Лист1','E1');
xlswrite(name,double(vu),'Лист1','F1');
```

Программа в среде Matlab для вывода графиков

```
clc;clear all;close all;

size_s=[400 400 800 600];

namea='AAA.tif';
nameb='BBB.tif';
nameab1='AB1.tif';
nameab2='AB2.tif';
nameab3='AB3.tif';
namea13D='A13D.tif';
namea23D='A23D.tif';
namea33D='A33D.tif';
nameb13D='B13D.tif';
nameb23D='B23D.tif';
nameb33D='B33D.tif';
nameab3D='AB3D.tif';
nameaaa3D='AAA3D.tif';
namebbb3D='BBB3D.tif';
name3DAB='3DAB.tif';
namewu123='wU123.tif';
namewu1='wU1.tif';
namewu2='wU2.tif';
namewu3='wU3.tif';
size=14;
set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')

dataset = xlsread('results.xls');
t1=dataset(:,1);
aaa=dataset(:,2);
bbb=dataset(:,3);
xxx=dataset(:,4);
zzz=dataset(:,5);
uuu=dataset(:,6);

dataset = xlsread('results2.xls');
t2=dataset(:,1);
aaa2=dataset(:,2);
bbb2=dataset(:,3);
xxx2=dataset(:,4);
zzz2=dataset(:,5);
uuu2=dataset(:,6);

dataset = xlsread('results3.xls');
t3=dataset(:,1);
aaa3=dataset(:,2);
bbb3=dataset(:,3);
xxx3=dataset(:,4);
zzz3=dataset(:,5);
uuu3=dataset(:,6);

dataset = xlsread('intcond.xlsx');
ccc1=dataset(:,1);
ccc2=dataset(:,2);
uuu11=dataset(:,3);
uuu12=dataset(:,4);
```

```
        uuu31=dataset(:,5);
        uuu32=dataset(:,6);
        c=dataset(:,7);
        c=c(1);
        uu_11=[uuu11(1),uuu31(1)];
        uu_12=[uuu12(1),uuu32(1)];
        uu_21=[uuu11(2),uuu31(2)];
        uu_22=[uuu12(2),uuu32(2)];
        uu_31=[uuu11(3),uuu31(3)];
        uu_32=[uuu12(3),uuu32(3)];


        u11a1=uu_11(c);
        u12a1=uu_12(c);
        u11a2=uu_21(c);
        u12a2=uu_22(c);
        u11a3=uu_31(c);
        u12a3=uu_32(c);


        s_1=["\mu_1_1","\mu_3_1"];
        s_2=["\mu_1_2","\mu_3_2"];
        s1=s_1(c);
        s2=s_2(c);

        legend1a=sprintf('a %s=%g %s=%g',s1,u11a1,s2,u12a1);
        legend1b=sprintf('b %s=%g %s=%g',s1,u11a1,s2,u12a1);
        legend2a=sprintf('a %s=%g %s=%g',s1,u11a2,s2,u12a2);
        legend2b=sprintf('b %s=%g %s=%g',s1,u11a2,s2,u12a2);
        legend3a=sprintf('a %s=%g %s=%g',s1,u11a3,s2,u12a3);
        legend3b=sprintf('b %s=%g %s=%g',s1,u11a3,s2,u12a3);

        legendwu1=sprintf('u1 %s=%g %s=%g',s1,u11a1,s2,u12a1);
        legendwu2=sprintf('u1 %s=%g %s=%g',s1,u11a2,s2,u12a2);
        legendwu3=sprintf('u1 %s=%g %s=%g',s1,u11a3,s2,u12a3);

        figure(1)
        plot(uuu,aaa)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu2,aaa2)
        plot(uuu3,aaa3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times','interpreter', 'latex')
        ylabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1a,legend2a,legend3a,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(1),namea);
        hold off
        %%%%%%%%
        figure(2)
        plot(uuu,bbb)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu2,bbb2)
        plot(uuu3,bbb3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times','interpreter', 'latex')
```

```
        ylabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1b,legend2b,legend3b,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(2),nameb);
        hold off
        %%%%%%%%
        figure(3)
        plot(uuu,aaa)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu,bbb)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times','interpreter', 'latex')
        ylabel('a, b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1a,legend1b,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(3),nameab1);
        hold off
        %%%%%%%%
        figure(4)
        plot(uuu2,aaa2)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu2,bbb2)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times','interpreter', 'latex')
        ylabel('a, b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend2a,legend2b,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(4),nameab2);
        hold off
        %%%%%%%%
        figure(5)
        plot(uuu3,aaa3)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu3,bbb3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times','interpreter', 'latex')
        ylabel('a, b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend3a,legend3b,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(5),nameab3);
        hold off
        %%%%%%%%
        figure(6);
        plot3(uuu,t1,aaa)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
```

```
xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
zlabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
legend(legend1a,'FontSize', size,'FontName','times')
legend('boxoff')
saveas(figure(6),namea13D);
hold off
%%%%%%%%%
figure(7);
plot3(uuu2,t2,aaa2)
hold on
grid on;
set(gcf,'Position',size_s)
set(gca,'FontSize',size)
xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
zlabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
legend(legend2a,'FontSize', size,'FontName','times')
legend('boxoff')
saveas(figure(7),namea23D);
hold off
%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(8);
plot3(uuu3,t3,aaa3)
hold on
grid on;
set(gcf,'Position',size_s)
set(gca,'FontSize',size)
xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
zlabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
legend(legend3a,'FontSize', size,'FontName','times')
legend('boxoff')
saveas(figure(8),namea33D);
hold off
%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(9);
plot3(uuu,t1,bbb)
hold on
grid on;
set(gcf,'Position',size_s)
set(gca,'FontSize',size)
xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
zlabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
legend(legend1b,'FontSize', size,'FontName','times')
legend('boxoff')
saveas(figure(9),nameb13D);
hold off
%%%%%%%%%
figure(10);
plot3(uuu2,t2,bbb2)
hold on
grid on;
set(gcf,'Position',size_s)
set(gca,'FontSize',size)
xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
zlabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
legend(legend2b,'FontSize', size,'FontName','times')
legend('boxoff')
saveas(figure(10),nameb23D);
```

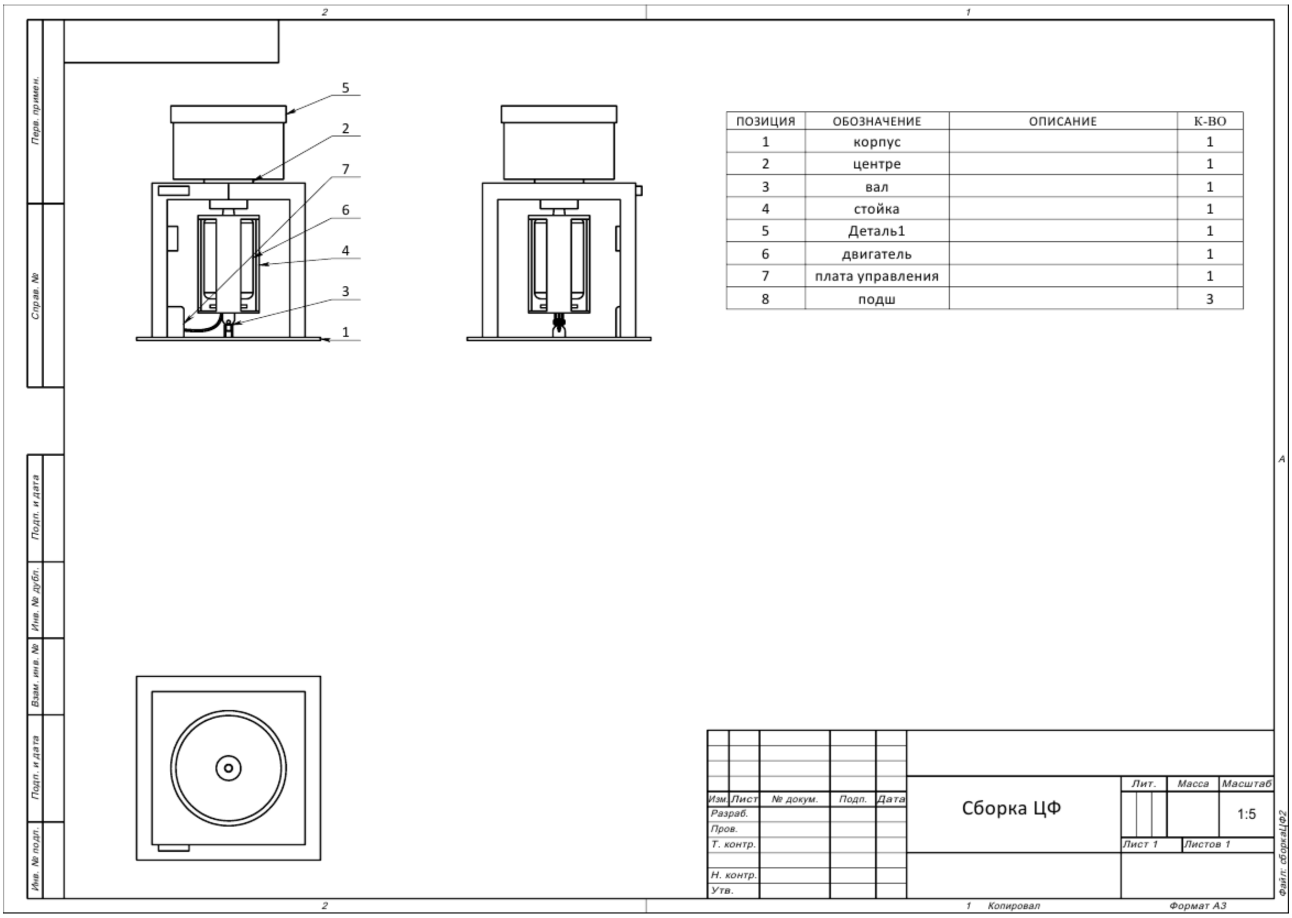
```
        hold off
        %%%%%%%%%
        figure(11);
        plot3(uuu3,t3,bbb3)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        zlabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend3b,'FontSize', size,'FontName','times')
        legend('boxoff')
        saveas(figure(11),nameb33D);
        hold off
        %%%%%%%%%
        zz_1=transpose(linspace(0,0,length(t1)));
        zz_2=transpose(linspace(0,0,length(t2)));
        zz_3=transpose(linspace(0,0,length(t3)));
        figure(12);
        plot3(uuu,aaa,zz_1)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot3(uuu,zz_1,bbb)
        plot3(uuu2,aaa2,zz_2)
        plot3(uuu2,zz_2,bbb2)
        plot3(uuu3,aaa3,zz_3)
        plot3(uuu3,zz_3,bbb3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
        zlabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1a,legend1b,legend2a,legend2b,legend3a,legend3b,'FontSize',
size,'FontName','times')
        legend('boxoff')
        saveas(figure(12),nameab3D);
        hold off
        %%%%%%%%%%
        figure(13)
        plot(uuu,t1)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legendwu1,'FontSize', size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(13),namewu1);
        hold off
        %%%%%%%%%%
        figure(14)
        plot(uuu2,t2)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legendwu2,'FontSize', size,'FontName','times','Location','northwest')
```

```
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(14),namewu2);
        hold off
        %%%%%%%%%%
        figure(15)
        plot(uuu3,t3)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legendwu3,'FontSize', size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(15),namewu3);
        hold off
        %%%%%%%%%
        figure(16)
        plot(uuu,t1)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot(uuu2,t2)
        plot(uuu3,t3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legendwu1,legendwu2,legendwu3,'FontSize',
size,'FontName','times','Location','northwest')
        legend('boxoff')
        set(gca,'FontSize',size,'FontName','times')
        saveas(figure(16),namewu123);
        hold off
        %%%%%%%%%

        figure(17);
        plot3(uuu,t1,aaa)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot3(uuu2,t2,aaa2)
        plot3(uuu3,t3,aaa3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        zlabel('a','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1a,legend2a,legend3a,'FontSize', size,'FontName','times')
        legend('boxoff')
        saveas(figure(17),nameaaa3D);
        hold off
        %%%%%%%%%
        figure(18);
        plot3(uuu,t1,bbb)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot3(uuu2,t2,bbb2)
        plot3(uuu3,t3,bbb3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
```

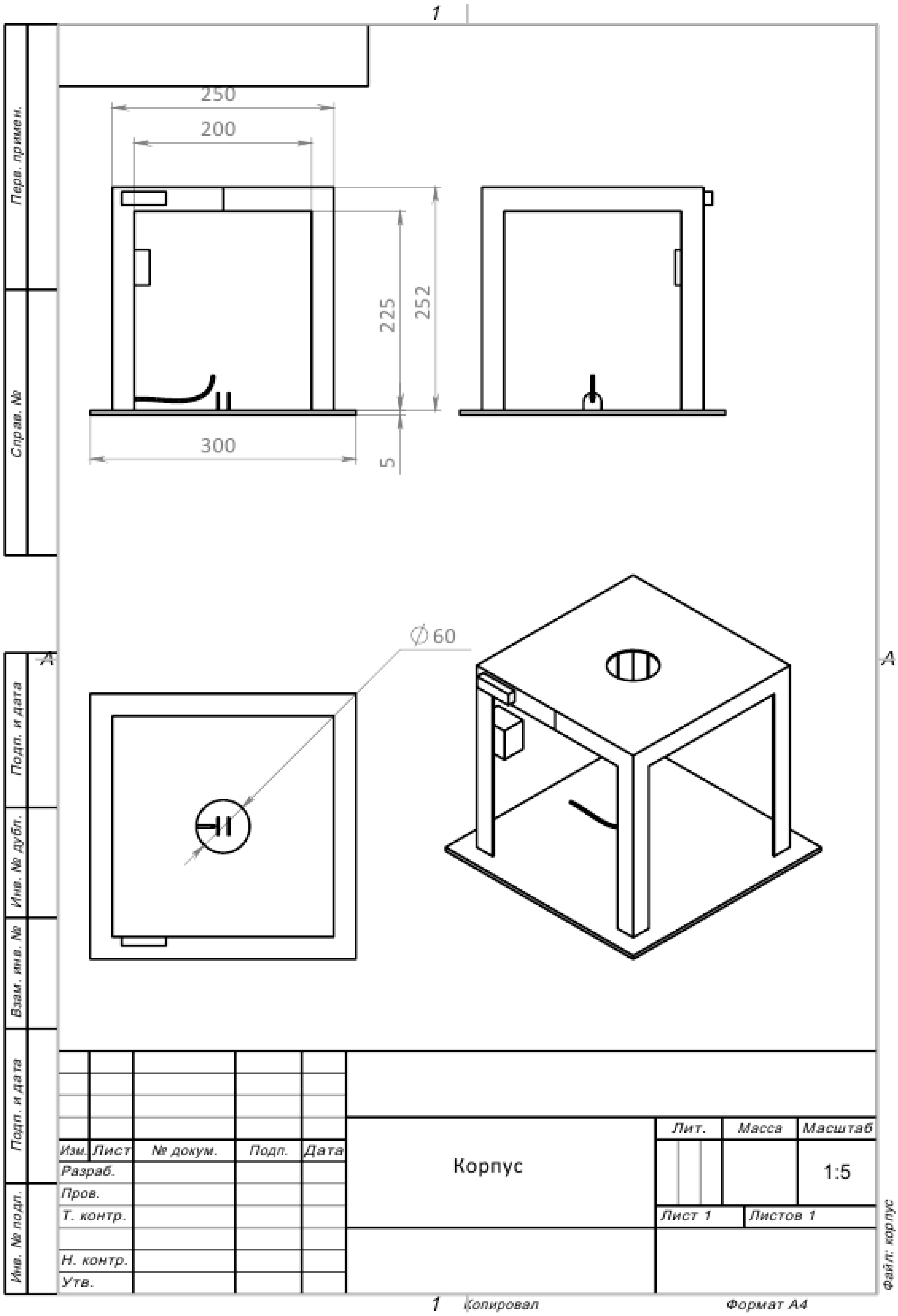
```
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        zlabel('b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1b,legend2b,legend3b,'FontSize', size,'FontName','times')
        legend('boxoff')
        saveas(figure(18),namebbb3D);
        hold off
        %%%%%%%%%

        figure(19);
        plot3(uuu,t1,aaa)
        hold on
        grid on;
        set(gcf,'Position',size_s)
        set(gca,'FontSize',size)
        plot3(uuu,t1,bbb)
        plot3(uuu2,t2,aaa2)
        plot3(uuu2,t2,bbb2)
        plot3(uuu3,t3,aaa3)
        plot3(uuu3,t3,bbb3)
        xlabel('u1','FontSize', size,'FontName','times')
        ylabel('\Omega','FontSize', size,'FontName','times')
        zlabel('a,b','FontSize', size,'FontName','times')
        legend(legend1a,legend1b,legend2a,legend2b,legend3a,legend3b,'FontSize',
size,'FontName','times')
        legend('boxoff')
        saveas(figure(19),name3DAB);
        hold off
```

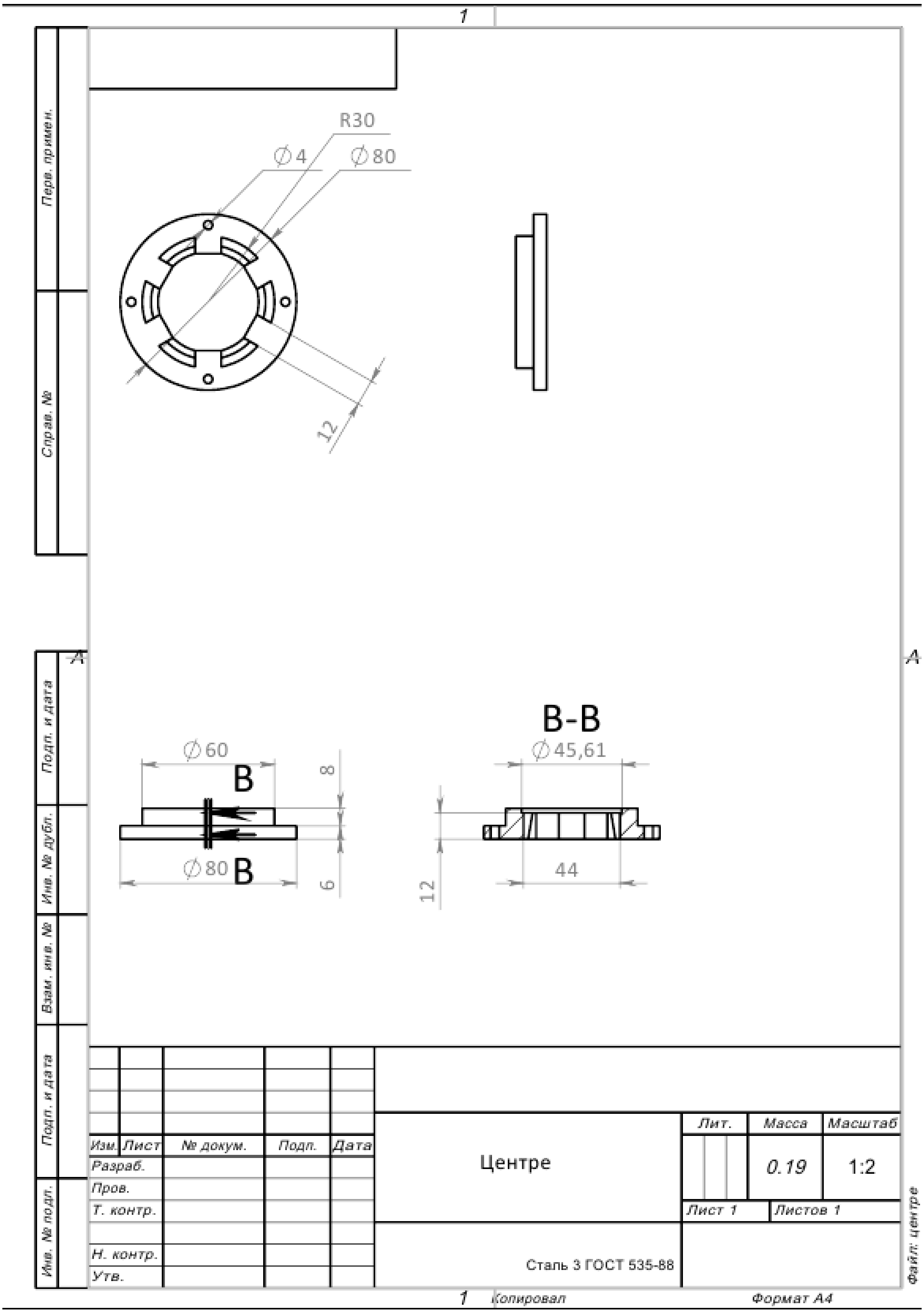
ПРИЛОЖЕНИЕ Б

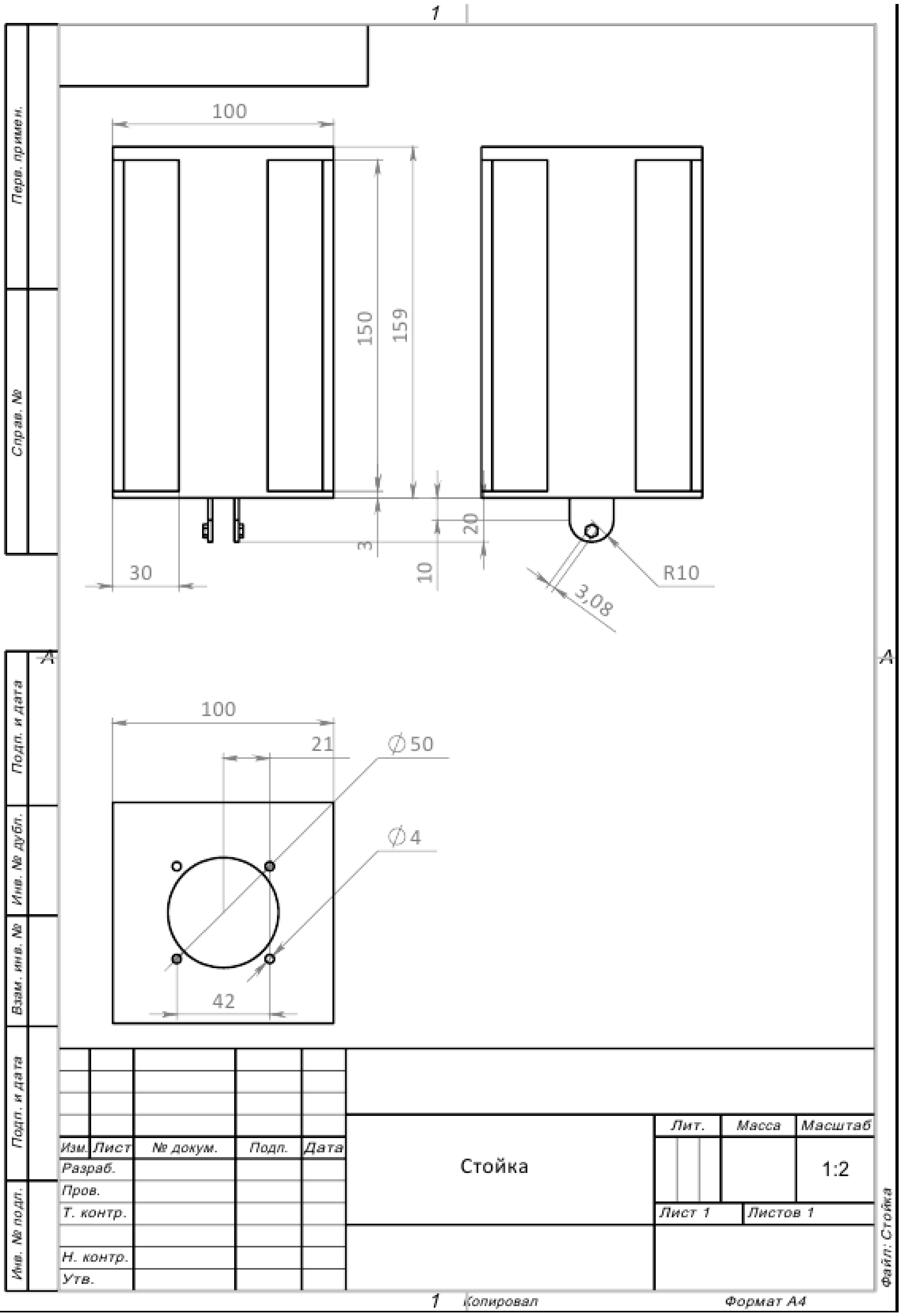
Проектно-конструкторская документация (ПКД) опытного образца центрифуги на базе вертикального гироскопического жесткого ротора

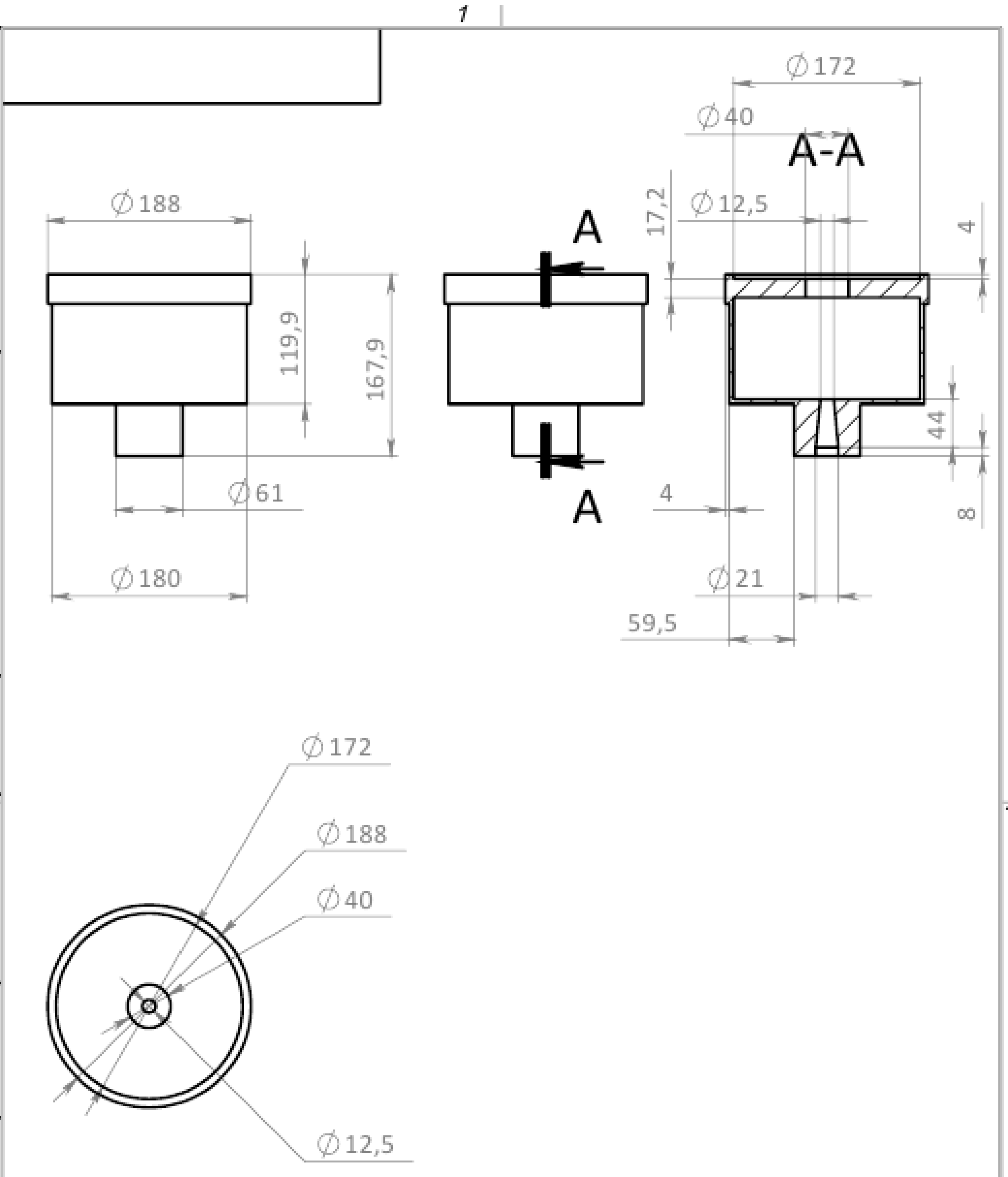


ПОЗИЦИЯ	ОБОЗНАЧЕНИЕ	ОПИСАНИЕ	К-ВО
1	корпус		1
2	центре		1
3	вал		1
4	стойка		1
5	Деталь1		1
6	двигатель		1
7	плата управления		1
8	подш		3


1
250
200
225
252
300
5
∅60
А
А
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
Изм.
Лист
№ докум.
Подп.
Дата
Разраб.
Пров.
Т. контр.
Н. контр.
Утв.
Корпус
Лит.
Масса
Масштаб
1:5
Лист 1
Листов 1
Файл: корпус
1
Копировал
Формат А4


1
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
R30
∅4
∅80
12
A
A
B-B
∅60
B
8
∅80
B
6
∅45,61
12
44
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Разраб.
Пров.
Т. контр.
Н. контр.
Утв.
Центре
Лит.
Масса
Масштаб
0.19
1:2
Лист 1
Листов 1
Сталь 3 ГОСТ 535-88
Файл: центре
1
Копировал
Формат A4


1
100
150
159
20
3
10
30
R10
3,08
A
A
100
21
Ø50
Ø4
42
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Разраб.
Пров.
Т. контр.
Н. контр.
Утв.
Стойка
Лит. Масса Масштаб
1:2
Лист 1 Листов 1
Файл: Стойка
1 Копировал Формат А4



Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Разраб.				
Пров.				
Т. контр.				
Н. контр.				
Утв.				

Деталь1

Лит.	Масса	Масштаб
		1:5
Лист 1	Листов 1	

Копировал

Формат А4

Файл: Деталь1